EDITURA CASEI ŞCOALELOR ŞI CULTURII POPORULUI

CURS

DE

MINERALOGIE

PROFESAT LA UNIVERSITATEA DIN IAŞI

DE

V. C. BUŢUREANU

PROFESOR DE MINERALOGIE ŞI PETROGRAFIE
LA FACULTATEA DE ŞTIINŢI.

III 58.551
vol 1

PARTEA I-a

CRISTALOGRAFIA GEOMETRICA

IAŞI
TIPOGRAFIA H. GOLDNER, STR. GH. MARZESCU 17
1924

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

- 7 IUN 1965
aeu 225.M5

Drepturile de traducere sau reproducere rezervate.

Nr. 253.

V. C. Butureanu

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PREFAȚA

In cursul celor mai bine de 30 de ani de când profesez la Universitatea din Iași, am putut constata imposibilitatea de a recomanda studenților unul din cursurile de Mineralogie publicate de către ilustrii profesori, fie francezi, germani sau englezi, din cauză că, fiecare din ei consideră știința mineralogică ca o știință națională, prezentând'o așa cum e înțeleasă de savanții din țara lor.

Așa: în cursurile de Mineralogie germane nu se întrebuințța de cât sistema de notațiune cristalografică a lui Naumann, fără a se aminti, macar comparativ, cele-lalte notațiuni franceză sau engleză; abia în timpurile din urmă se găsește notația engleză a lui Miller alături de cea germană a lui Naumann.

Nu se deosebesc din acest punct de vedere nici autorii de cărți didactice franceze de cei germani sau englezi, ba acești din urmă fiind și mai naționaliști, căci nu întrebuințează de cât notațiunea lui Miller.

Pentru noi era însă necesar a pune în fața studenților știința mineralogică în toată generalitatea sa; și pentru a ușura trecerea de la o notațiune la alta, era necesar a studia diversele forme ale cristalilor, comparativ în cele trei sisteme cristalografice. Aceasta m'a obligat a redacta cursul pe care l'am făcut studenților, în spiritul arătat mai sus.

Astăzi când, grație ajutorului dat de Ministerul Instrucțiunei, acest curs poate apăre în public, cred că el va acoperi un gol însemnat în literatura noastră științifică didactică.

Cred necesar a da încă o mică explicație. De câtă-va vreme metoda întrebuințată pentru descrierea și împărțirea formelor cristaline și care se găsește predominând în ultimele tratate de Cristalografie apărute, este acea bazată pe simetrie.

Nu am de zis nimic contra metodei, în ce privește valoarea ei; dar cred că aceste publicații nu corespund de loc cerințelor unor tratate clasice; fie ele destinate chiar studenților facultăților de științi. In adevăr: în afară de principiile de simetrie și clasificarea formelor cristaline în cele 32 de clase de simetrie, nu găsim decât descripții sumare a acestor forme, mai mult o enumerare a lor, fără a se arăta mo-

dul lor de obținere sau deducere; iar partea relativă la proiecții este cât se poate de redusă, lăsând pe cetitor, sau să le memorizeze, sau să se adreseze la tratate speciale, adesea ori prea complicate.

Aplicarea razelor Roentgen la demonstrarea existenței rețelelor moleculare, este fără îndoială un început ce promite a da rezultate surprinzătoare în ce privește modul de distribuire a atomilor în poliedrele moleculare a cristalilor, dar rezultatele obținute până acuma, nu pot servi la un studiu clasic pentru studenți, ci se adresează mai mult specialiștilor.

Astă-zi nimeni nu mai poate avea pretenția că poate publica un curs cu totul original, căci fie care e dator a utiliza toate cunoștințele date la iveală de alți cercetători; de aceia a trebuit să profit de tot ce s'a scris în domeniul Mineralogiei de către autorii clasici moderni ca: Friedel, de Lapparent, Naumann, Tschermak, Dana etc. precum și de lucrările savanților mineralogi: Des Cloizeaux, Mallard, Lacroix, Groth, Linck, Niggli etc., pentru a ține acest curs în curent cu ultimele descoperiri ale științei.

Am căutat a intercala în text, mai ales în Cristalografie, cât mai multe figuri, pentru a face să apară cât mai clară, deducerea formelor unele din altele.

Iași 12 Iunie 1921 **V. C. Butureanu**

ISTORIC

Indată ce omul a apărut pe pământ, pentru a-şi asigura existenţa, a trebuit să se servească de diversele corpuri ce a găsit în natură în jurul său, şi printre aceste de sigur în primul loc de acele ce intrau în constituţia scoarţei pământului. De acest lucru ne putem asigura observând descoperirile făcute în Arheologie. Este ştiut astăzi că, în timpurile preistorice omul s'a servit de diverse pietre pentru a face instrumente de aparare, sau obiecte pentru întrebuinţare casnică : în adevăr, se găsesc în numeroase staţiuni preistorice, atât în vechiul cât şi în noul continent, topoare, cuţite, vârfuri de săgeţi, ciocane, precum şi diverse vase scobite în blocuri de piatră etc. toate aceste obiecte făcute mai ales din silex sau alte pietre dure. Fără a exagera dară, putem să spunem că, cunoaşterea şi întrebuinţarea mineralelor se ridică până la origina omului. Dar de atunci şi până astăzi, cunoştinţele noastre asupra mineralelor au luat o aşa de mare desvoltare, în cât este nevoe de a urmări progresele făcute în această direcţiune, şi pentru aceasta ne propunem a face istoricul ştiinţei care se ocupă cu studiul mineralelor. Cu această ocaziune vom putea urmări fazele prin care au trecut cunoştinţele oamenilor asupra corpurilor ce constitue scoarţa pământului, precum şi diversele explicaţii ce s'au dat asupra naturei şi a originei lor.

Deşi Arheologia ne dă proba că, în timpurile preistorice oamenii cunoşteau mineralele şi se serveau de unele din ele, totuşi nu găsim documente scrise care să vorbească de ele, decât în timpurile istorice. Aşa : primul document ce găsim, în care se vorbeşte de minerale este *Geneza* atribuită lui Moisi : şi dacă comparăm descripţia pe care o face despre crearea lumei, cu cunoştinţele geologice ce avem asupra fazelor prin care a trecut pământul de la origina sa până în timpurile noastre, găsim o mică potrivire în ce priveşte ordinea de succesiune în apariţia fenomenelor naturale sau a fiinţelor vieţuitoare la suprafaţa pământului. De altfel este uşor de explicat, prin caracterul de carte sfântă şi inspirată a Genezei, faptul că, după Moisi, totul se reduce la intervenţia puterei divine care : *a voit şi s'a făcut.*

Mai târziu găsim in India *Institutele lui Manu,* care a trăit şapte secole după Moisi. Deşi Institutele constitue cartea sfântă a Indienilor, totuşi Manu explică starea actuală a scoarţei pământului, ca rezultatul cataclismelor care s'au succedat în di-

verse epoce, în timp de mii de secole, şi care au făcut să apară şi să dispară generaţiuni de fiinţe din ce în ce mai perfecte. Deci, ca explicare cosmogonică, Geneza este inferioară Institutelor. Totuşi în Geneză găsim pentru prima dată citându-se un oarecare număr de minerale. Aşa: în *Exod* Cap. XXVIII Moisi vorbeşte de 12 pietre preţioase care compuneau Pectoralul lui Abraham. După interpretările date numelor acestor pietre se pare că ar fi vorba de mineralele următoare: *Cornalina, Iacint, Agat, Ametist, Sardoană, Iasp, Crisolit, Diamant, Safir, Rubin, Smaragd şi Topaz.* Tot în Geneză găsim indicaţia că: Efodul lui Aaron era împodobit de două pietre de *Onix*, montate în *Aur*, pe care era scris numele celor 12 triburi. Examinând lista de mai sus, vedem că primele tipuri sunt varietăţi de silicie, care au trebuit să atragă atenţiunea oamenilor, prin duritatea lor, precum şi prin frumuseţa şi varietatea culorilor lor, pe când majoritatea celorlalte sunt varietăţi de Corindon, exceptând Diamantul, a cărui cunoştinţă nu pare a fi confirmată pentru acele timpuri. Se mai constată încă din cele de mai sus, că în acele timpuri se cunoştea şi se lucra *Aurul* precum şi gravura pe pietrele dure. In particular aurul pare a fi fost cunoscut din timpurile cele mai vechi, şi în diversele cărţi ale Genezei, în Exod, Job etc. găsim adese ori vorbindu-se de aur, de argint şi chiar de aramă. La Egipteni cunoştinţele asupra aurului se perd in origina timpurilor, când se crede că a fost descoperit de către unul din primii lor monarhi, în năsipurile Nilului. Cauza pentru care nu vedem vorbindu-se la început decât de aceste trei metale este că, ele se găsesc în stare nativă, sunt mai puţin alterabile, mai uşor de lucrat, fără a uita că ele au cele mai frumoase culori. In ce priveşte argintul, se pare că tot Egiptenii l'au cunoscut mai întâi, şi numai cu mult mai târziu l'au cunoscut Evreii şi Grecii.

Pe când aurul şi argintul erau întrebuinţate ca metale preţioase, *Arama* era întrebuinţată ca metal uzual, şi se prepara, după cartea lui Job, *prin topirea unei pietre*, care nu putea fi altceva decât un carbonat dublu de cupru şi de zinc. Pentru a arăta că arama a fost cunoscută cu mult timp înaintea ferului, vedem că Arheologia ne arată că a existat o *etate a bronzului*, ⟨numită în mod impropriu astfeliu, şi trebuind a se numi *etatea aramei*⟩ cu mult înaintea *etăţii Ferului*. Ne putem astăzi uşor explica aceasta, când ştim cât de greu se extrage ferul faţă cu arama. Cu toate aceste după Geneză, ferul a fost cunoscut şi lucrat în timpurile cele mai vechi, in acelaş timp cu arama, de către Tubal-Cain. De asemenea se ştie că, în timpul asediului Troiei ⟨1200 i. Cr.⟩ grecii nu se serveau decât de arme de aramă.

Tot din aceste timpuri avem primele cunoştinţi asupra minelor şi a extracţiei metalelor, atribuite lui Job, căci el este acela ce vorbeşte mai întâi despre existenţa focului central, precum şi despre modul de a se scoate metalele din roci şi munţi. ⟨Job cap. XXXIII⟩.

E greu de a fixa epoca când s'a cunoscut bine extragerea şi lucrul ferului, care sunt în strânsă legătură cu posibilitatea producerei de temperaturi înalte. Şi, deşi cei întâi oameni au trebuit să cunoască focul, totuşi se ştie că în timpurile vechi au existat popoare care nu cunoşteau modul de a se servi de foc, pe care'l considerau ca un animal care mănâncă obiectele ce ard, şi care dispare îndată ce s'a mulţumit.

Deci, din timpul lui Job, toate cunoştinţele mineralogice consistau în întrebuinţarea: aurului, argintului, aramei şi a ferului; în fine a bitumelui, care a servit la construirea arcei lui Noe, şi a sulfurelui, care a ars Sodoma şi Gomora.

De la Moisi până la Solomon, s'au dezvoltat mai ales cunoştinţele asupra metalurgiei, căci în timpul lui Solomon s'a făcut mare uz de metale preţioase, întrebuinţate mai ales pentru împodobirea templului; în urmă s'a cunoscut şi întrebuinţat tăerea şi sculptura marmorei, care a intrat în mare parte în construirea Templului.

De la Solomon până la Omer, cunoştinţele mineralogice au făcut puţin progres. Fenicienii cari erau un popor foarte comerciant, au făcut un mare comerţ cu: aur, argint, vermilion, fer, plumb şi cupru; lor se datoreşte descoperirea *Staniului*, numit pe atunci *Casiteros* de la *insulele Casiteride* pe coastele Spaniei, unde ei au găsit acest corp pentru prima oară. In timpul lui Omer, întrebuinţarea staniului era foarte răspândită şi perfecţionată, după descripţia pe care acest poet o face asupra scutului lui Achile.

Un alt document în care se găseşte o descriere a mineralelor cunoscute în timpurile vechi este catalogul maurului *Abolays*, care este o traducere a unui document în limba chaldeiană, a cărui dată este foarte veche; în acest catalog se găseşte descripţia a 325 de minerale, însă în mod aşa de obscur în cât dacă nu s'ar fi cunoscut mineralul după numele său, nu s'ar fi putut recunoaşte după descrierea lui

In aceste timpuri apare o nouă ştiinţă. Egiptenii credeau că metalul cel mai pur este aurul, şi că toate celelalte metale puteau să fie transformate în aur prin diverse operaţiuni; de aici a rezultat o teorie filosofică cunoscută sub numele de *Filosofie hermetică*, după numele lui *Hèrmes* care s'a ocupat mai mult de ea. Din Egipt această ştiinţă a trecut în Grecia, unde luă numele de *Himeia* (χημεια) de unde Arabii au făcut numele de *Alchimie*. In urmă filosofia hermetică avu un alt scop: nu se mai mulţemea de a obţine *transmutarea metalelor* pentru a se îmbogăţi; se căuta o reţetă pentru prepararea unui elexir pentru prelungirea vieţei; graţie cercetărilor şi lucrărilor mai serioase făcute în acest scop, cunoştinţele asupra naturei mineralelor au făcut un mare progres.

Deşi în acest timp un mare număr de filosofi s'au ocupat cu studiul şi descrierea mineralelor, şi mai ales a pietrelor pre-

ţioase, totuşi nu cunoaştem nici una din aceste descripţii decât după citaţiile altor scriitori mai moderni, căci originalele acestor lucrări nu au ajuns până la noi. Trebue să ajungem până la *Herodot*, cu patru secole mai târziu, pentru a găsi oarecari descripţiuni mai importante asupra mineralelor. Dar şi aici nu găsim de cât trei minerale nouă, necunoscute predecesorilor şi anume: *Marmura porus*, care a servit la construcţia templului de la *Delfi* şi care e necunoscută astăzi; apoi *Bazaltul*, cunoscut atunci sub numele de *Piatra din Etiopia* şi *Piatra Tophus*, care, după toate probabilităţile este piatra de moară din zilele noastre. Tot Herodot ne vorbeşte de nişte pietre de Smaragd foarte mari; dar după părerea criticilor moderni se pare că, pretinsele colone şi statui de Smaragd, erau în realitate de sticlă, căci în acele timpuri se lucra sticla foarte bine, şi se obişnuia a se face din ea obiecte de dimensiuni mari. Nu tot aşa este şi cu smaragdele mai mici, care serveau la împodobirea a diverse bijuterii, şi care veneau din sudul Egiptului din două mine, din care una aparţinea regilor Etiopiei, cari au trebuit să facă mari războaie, pentru a-şi asigura stăpânirea lor.

Mai târziu găsim pe *Aristot* (384 a C.) care vorbeşte la finele operei sale asupra *Meteorilor*, despre minerale însă în mod foarte succint. El s'a ocupat mai ales cu chestiuni ce se raportau la Geologie. Discipolul său *Teofrast*, a scris un tratat asupra *Pietrelor* din care numai o parte a ajuns până la noi. Aici găsim pentru prima dată vorbindu-se de o serie de minerale precum: *Pirita, marmura, alabastru, ambra, ocrul, gipsul, sulfura de arsenic* etc. Clasificarea mineralelor este făcută după modul cum se comportă la foc, după culoare, duritate etc. Intre alte idei extraordinare ce Teofrast are asupra mineralelor, este şi acea de a le da un sex, iar în ce priveşte origina lor, el admite că, metalele sunt produse de apă, iar pietrele de pământ.

După Teofrast găsim pe *Dioscoride* care, nu numai că nu ne dă nimic nou asupra mineralelor, dar nici nu citează pe toate câte erau cunoscute la acea epocă; de altfel el s'a ocupat de minerale numai în raport cu medicina.

Câţiva ani mai târziu găsim cele 37 cărţi ale lui *Pliniu* asupra istoriei naturale; ne-am aştepta a găsi un rezumat complect a tuturor cunoştinţelor ce existau atunci asupra mineralelor; în realitate găsim aici o lipsă completă de metodă, căci Pliniu studiază mineralele în raport cu artele ce se servesc de ele. Se pare că Pliniu ar fi cunoscut *Platina*, cu toate că nu o numeşte, căci vorbeşte de un metal greu ca aurul, dar care este un amestec de alb şi negru.

De asemenea el descrie forma octaedrică a Diamantului, pe care se pare că l-a cunoscut destul de bine. In multe din descripţiile sale el face confuziune, dând acelaş nume la corpuri deosebite, şi aceasta din cauza uşurinţei cu care primea tot ce i se spunea.

După Pliniu găsim mai mulţi autori cari s'au ocupat de minerale; printre aceştia vom cita pe *Avicene* care împărţi mineralele în patru clase: *pietre, metale, sulfuri* şi *săruri*, clasificaţiune care este foarte importantă, având în vedere starea cunoştinţelor din acea epocă, asupra naturei corpurilor. Din această epocă datează deprinderea de a da metalelor numele corpurilor cereşti precum *Saturn* pentru plumb, *Jupiter* pentru staniu, *Mart* pentru fer etc.

Deja la începutul secolului al 12-lea descoperirele făcute în chimie, produc mari schimbări în mineralogie: încep a se găsi metode mai sigure pentru determinarea naturei mineralelor; vom cita *cupelaţiunea* care a fost imaginată la 830 de către *Geber* alchimist arab. In secolul al 15-lea găsim descoperirea Antimoniului şi la finele acestui secol găsim o mare descoperire: acea a topirei ferului în stare de fontă. Insă adevăratul fundator al metalurgiei este *Agricola* medic german.

Operile sale mai importante sunt: *De re metallica, De natura fossilium, De ortu subterraneorum et De veteribus et novis metallis.* Agricola împarte mineralele în 4 clase: 1) *Pământuri*, 2) *Sucurile concrete* (bitume, succin) 3) *Pietrele* şi 4) *Metalele*. Agricola este cel întâi care vorbeşte despre *Bismut*, dar îl confundă cu o varietate de plumb (plumb cenuşiu).

In secolul al 16-lea găsim câteva lucrări asupra mineralelor, însă ele sunt de puţină importanţă. De asemenea secolul al 17-lea trece în discuţia asupra originei metalelor şi a pietrelor, precum şi a diverse chestiuni de domeniul Geologiei.

La finele acestui secol, găsim două opere importante: *Cursul de Chimie a lui Lémery*, care pune sfârşit Hermetismului şi opera lui *Luidius*, care fixează la 1766 numărul mineralelor cunoscute până la el. Din această epocă datează întrebuinţarea Microscopului, graţie căruia ştiinţa a făcut aşa mari progrese. In fine în această epocă apare tratatul de *Cristalografie* a lui *Hottinguer*. Cu toate că nu găsim în acest uvraj legile cristalizării, el dă o descriere foarte complectă asupra formelor exterioare ale mineralelor. Această carte pare a fi dat semnalul publicării unui număr de studii apărute în cursul secolului al 18-lea asupra aceluiaş subiect, şi care au pregătit terenul pentru marile descoperiri ce s'au făcut mai târziu. Nu facem decât să amintim o perioadă întreagă care a dat naştere unei alte ştiinţi: *Paleontologia*, şi care a provocat discuţii şi publicaţii importante asupra fosilelor. La 1730 *Bromel* publică un tratat de Mineralogie bazat pe principiile pirognostice. Cu toate că principiile pe care a fost bazată clasificaţia sa au fost găsite neexacte, totuşi această lucrare a lui Bromel este de mare valoare, căci ea poate fi considerată ca origina încercărilor pirognostice în Mineralogie. In adevăr: zece ani mai târziu găsim pe *Swab* care întrebuinţează sulfaiul în încercările pirognostice, ceia ce trebuia să deie lui *Cronstedt* posibilitatea de a crea după douăzeci de ani, o nouă metodă de cercetări.

Prima jumătate a secolului al 18-lea este remarcabilă prin progresele făcute mai ales în metalurgie precum şi prin o serie de descoperiri în chimie. In urma unor lungi şi laborioase cercetări *Cronstedt* a căutat să poată introduce în studiul Mineralogiei, o metodă care să permită de a întrebuinţa în acelaş timp caracterele exterioare precum şi compoziţia chimică a mineralelor, lucru foarte greu în acele timpuri, când nici formele cristaline nu erau studiate şi nu se dădea importanţă de cât caracterelor exterioare empirice. Cu toate greşelile mari ce prezintă metoda lui Cronstedt, trebue să o spunem că ea a dat mineralogiei un nou impuls pe calea chimică.

După Cronstedt găsim pe *Lineu* şi *Walerius* care introduc în lucrările lor perfecţionările lui Cronstedt.

In definitiv putem spune că, până la această epocă erau patru sisteme pentru studiul mineralelor: sistemul caracterelor exterioare fundat de către Avicene sau *şcoala empirică*; sistemul lui Bromel, care dă importanţă caracterelor pirognostice; apoi sistemul lui Lineu în care se consideră forma cristalină şi în fine sistemul chimic imaginat de Cronstedt.

Aceasta era starea cunoştinţelor când ajungem la epoca celebrului profesor de la Freiberg, *Werner* care ne dă prima clasificaţie serioasă în mineralogie şi care e bazată pe toate cunoştinţele timpului său. El împarte mineralele în 4 clase:

1) *Pământuri şi pietre* 2) *Săruri*, 3) *Combustibile* şi 4) *Metale*. In subdiviziuni găsim mari erori. Această clasificaţie a lui Werner, deşi empirică în detaile, este bazată pe un principiu chimic, care a servit la formarea celor 4 clase. Cu toate că Werner n'a făcut decât să profeseze cursul său fără a-l imprima, elevii săi răspândiră metoda profesorului lor şi unia o publicară chiar.

Succesorul lui Werner, *Mohs* admite ca principiu a clasificaţiei sale, pondul specific, ceiace a produs o mare confuziune.

Un caracter care, până atunci nu putuse a fi întrebuinţat în studiul mineralelor, este acel al formei cristaline, a cărei secrete nu au fost descoperite de ştiinţa germană. Era rezervată ştiinţei franceze onoarea descoperirei legelor fundamentale a cristalizaţiunei. *Romé de Lisle* a demonstrat cel întâi că: de câte ori două sau mai multe elemente se combină în aceleaşi condiţiuni şi proporţiuni, rezultă totdeauna un corp cu o formă specială, caracterizată prin constanţa unghiurilor ce formează feţele acestei forme. Dar el nu merge mai departe cu această idee pentru a afirma că, forma cristalină era suficientă pentru a determina natura unui corp. Observând însă că, ponderea specifică şi duritatea sunt caractere care variază puţin pentru aceiaşi specie, şi că este greu a găsi două corpuri care să prezinte aceste trei caractere comune, el a crezut că se poate dispensa de compoziţia chimică pentru a putea determina diversele specii minerale. Şi pentru a putea pune în aplicare principiul constanţei unghiurilor cristalelor, el inventă aparatul numit *Goniometru* pentru a măsura aceste

unghiuri. Aici se opreşte toată activitatea lui Romé de Lisle.

In timp ce Romé de Lisle punea astfel bazele cristalografiei, *Bergmann* după ce a creat nomenclatura chimică, imaginâ o metodă mineralogică pur chimică, divizând mineralele în 4 clase: *Săruri, Pământuri, Combustibile* şi *Metale*, subdiviziunile sunt bazate şi ele pe caracterele chimice. O asemenea clasificaţiune este tot ce putea să fie mai simplu şi mai complect.

Dar să ajungem la adevăratul creator al cristalografiei, ilustrul abate *Haüy*. Prima sa descoperire a fost acea a *clivajului*, care deşi întrebuinţată de lapidari, nu fusese încă întrebuinţată în ştiinţă. Cu ajutorul acestei proprietăţi el ajunse la ideia de *moleculă integrantă* şi, revenind de la formele primitive la formele secundare el descoperi *legile descreşterilor*, pe care le întrebuinţă în urmă pentru calculele cristalografice. De aceia Haüy întrebuinţă în clasificaţia sa două principii nouă: compoziţia chimică şi calculele cristalografice. Cercetările lui Haüy au fost atât de perfecte, încât mai târziu ele nu au fost modificate decât în formă, dar nu şi în fond.

După Haüy găsim în Germania lucrările lui *Weiss* asupra *Hemiedriei*, precum şi frumoasele teorii a lui *Delafosse* în Franţa, confirmate prin strălucitele lucrări a lui *Pasteur*. O nouă descoperire foarte importantă în mineralogie este acea a *Isomorfismului* şi *Polimorfismului* datorită lui *Mitscherlich*, cu toate că aceste descoperiri au adus un mare progres în ştiinţă, arătând că există o relaţiune între compoziţia chimică şi forma cristalină, totuşi nici până astăzi nu ştim în ce consistă această relaţiune.

La această epocă ştiinţa ajunsese la un grad de progres suficient, pentru ca o bună clasificaţie în Mineralogie să nu fie bazată numai pe forma cristalină şi celelalte caractere exterioare, dar după afirmaţiile lui Cronstedt, Werner şi Haüy, că ea trebuia în primul rând să se adreseze caracterelor chimice.

Această idee a fost pusă în practică de către ilustrul chimist suedez *Berzelius*, care, după ce a pus bazele chimiei analitice, imaginâ o clasificaţie a mineralelor, însă o clasificaţie exclusiv chimică, ceia ce nu reprezenta încă cea mai perfectă clasificaţie.

După Berzelius urmează o pleiadă de savanţi francezi şi germani, care caută a concilia pe cât posibil cele trei principii în clasificaţia mineralelor: caracterele chimice, caracterele cristalografice şi caracterele exterioare. Vom cita numai numele ilustre a lui *Beudant, Rose, Dufrenoy, Delafosse, Dana, Descloizeaux* etc.

In ultimele timpuri se manifestă un nou progres în ştiinţa mineralogică: introducerea studiului proprietăţilor optice, şi aceasta graţie lucrărilor lui *Arago* şi *Fresnel* şi apoi a lui *Brewster, Wollaston, Herschel* etc. Insă *Sénarmont* este acel care a introdus în mod efectiv metoda optică în studiul mineralelor, metodă care a fost dusă la un aşa mare grad de perfecţionare în ultimul timp, prin lucrările ilustrului cristalograf francez Descloi-

zeaux. Graţie acestor descoperiri, vedem apărând o nouă ştiinţă: *Petrografia* rezultatul aplicării cercetărilor microscopice asupra constituţiei rocelor, cercetări începute mai întâi de către *Sorby* şi continuate de *Rosenbusch* şi *Zirkel* în Germania şi de către *M. Levy* şi *Fouqué* în Franţa.

Astăzi graţie întrebuinţării microscopului polarizant datorit lui *Em. Bertrand*, studiul rocelor a ajuns a avea o mare preciziune pe lângă o mare uşurinţă şi eleganţă.

INTRODUCERE

Toate corpurile care există la suprafaţa pământului se împart în trei clase mari: *animale*, *vegetale* şi *minerale*. Corpurile ce formează cele două d'întâi clase se deosebesc de cele din a treia prin un caracter deciziv: *viaţa*. Pe când animalele şi vegetalele se nasc, trăesc şi apoi mor, mineralele n'au viaţă. Dacă voim a face să intervină şi alte caractere distinctive mai intime, vom putea face să intervină conformaţia: pe când animalele şi vegetalele posedă diverse organe, care au de îndeplinit un rol anumit pentru a întreţine viaţa individului, mineralele sunt lipsite, fiindcă nu au nevoe. Dar caracterul distinctiv cel mai important este fără îndoială constituţia internă: pe când animalele şi vegetalele sunt compuse din un număr mai mic sau mai mare de molecule deosebite, care în timpul vieţei se distrug şi se reînoesc continuu, mineralele considerate în stare omogenă, sunt compuse în toată întinderea lor din aceleaşi molecule, care nu se schimbă atâta vreme cât nu este o cauză exterioară care să vină şi să influenţeze asupra naturei sale. *Vom înţelege dar sub numele de* Minerale, *corpuri simple sau compuse care, având o compoziţie chimică determinată, intră în constituţia scoarţei pământului.*

Mineralele sunt răspândite în mod foarte arbitrar la suprafaţa pământului şi omul s'a servit de ele de la apariţia sa pe suprafaţa pământului: este dar necesar să le studiem. *Ştiinţa care se ocupă cu studiul mineralelor se numeşte* Mineralogie.

Să vedem acum, în ce va consta acest studiu. Se ştie că, pentru a cunoaşte un corp, trebue să ştim a-l deosebi de toate celelalte corpuri cu care este asociat. Putem ajunge la acest rezultat, mai întâi prin cunoştinţa *caracterelor fizice*, când ele sunt deajuns de bine pronunţate; când însă aceste caractere sunt comune mai multor corpuri, atunci ele nu mai sunt suficiente şi trebue să facem recurs la alte mijloace, şi în primul loc trebue să ne adresăm compoziţiei chimice a corpului, determinând care sunt elementele care intra în constituţia sa, şi cum ele sunt combinate, ceiace constitue *caracterele chimice* a corpului.

Printre caracterele fizice, cel întâi care ne impresionează este acel datorit formei corpului. Câte odată găsim corpuri fără

formă regulată, şi atunci ele se numesc *amorfe*. După cum vom vedea mai în urmă, în corpurile amorfe moleculele sunt distribuite în toate direcţiunele în mod arbitrar: aceste corpuri sunt lipsite de o arhitectură moleculară, ceiace arată că, masa în mijlocul căreia acest corp s'a consolidat, nu era în condiţii de linişte necesare unei dispoziţii regulate a moleculelor sale.

Când însă un corp în starea solidă se găseşte în condiţiuni astfel că, moleculele sale nu se supun decât puterilor de atracţiune reciprocă care există în mod natural între ele, aceste molecule se dispun regulat după linii drepte, iar la exterior corpul este terminat cu feţe plane, care-i dau forma unui poliedru geometric care-care. In acest caz corpul se numeşte *cristalizat*, indivizii cristalizaţi se numesc *cristali*, iar *partea mineralogiei, care se ocupă cu studiul cristalilor* se numeşte *Cristalografie*.

Fiind că numărul mineralelor este foarte mare, pentru a le putea studia, trebue să le reunim în grupe cu caractere comune; la acest rezultat ajungem prin o clasificaţiune.

Prin urmare: pentru a putea face studiul complect al mineralelor, va trebui să împărţim Mineralogia în patru părţi:

In prima parte ne vom ocupa cu studiul formelor geometrice, sub care se prezintă mineralele, ceia ce formează obiectul *Cristalografiei geometrice*.

A doua parte va cuprinde studiul tuturor celorlalte proprietăţi datorite caracterelor fizice a cristalilor, precum: duritate, densitate etc. şi mai ales proprietăţile optice, asupra cărora vom insista mai mult: Ea formează *cristalografia fizică*.

In partea a treia vom studia *caracterele chimice* a mineralelor şi ne vom ocupa de compoziţia lor, precum şi de diversele metode prin care putem determina această compoziţie, fie în mod analitic sau sintetic, fie pe cale umedă sau pe cale uscată.

In fine: a patra parte va constitui *Mineralogia descriptivă*, având ca obiect clasificaţia şi studiul speciilor minerale.

— —

Inainte de a merge mai departe, să vedem ce loc ocupă Mineralogia printre ştiinţi. Dacă examinăm în ordine istorică, mersul descoperirelor în domeniul Mineralogiei, vom constata că: timpurile vechi, evul mediu şi chiar timpurile moderne, nu ne prezintă decât o aglomeraţie de cunoştinţi, fără nici o legătură între ele. Cauza este că, în aceste timpuri toate cunoştinţele mineralogice erau rezultatul numai a observaţiunei; din care cauză Mineralogia era numai o ramură mai mult sau mai puţin importantă a Geologiei, şi prin urmare era clasată printre ştiinţele naturale ca o ştiinţă de observaţie. Actualmente Mineralogia face parte din grupa Ştiinţelor Fizice, deci a devenit o ştiinţă de experimentaţiune.

Raportându-ne la caracterele pe care le-am considerat necesare pentru studiul mineralelor, vedem uşor că Mineralogia împrumută mijloacele sale de investigare de la cele două ştiinţi

eminamente experimentale, Fizica şi Chimia, şi în special Cristalografia poate fi considerată ca o ştiinţă matematecă. Dacă pe lângă partea experimentală, luăm în consideraţie partea datorită forţamente observaţiunei, aceasta nu ia întru nimic Mineralogiei caracterul de ştiinţă fizică. Nu există ştiinţă care să prezinte o mai mare varietate în domeniul său, decât Mineralogia; în adevăr, pentru acei ce voesc a se ocupa în mod special cu speculaţiunile transcendentale ale Filosofiei, ea oferă un vast câmp de studii în părţile sale relative la explicarea cristalizaţiei, a fenomenelor de isomorfism şi polimorfism etc.; pentru acei ce caută preciziunea matematică, ea oferă un vast câmp de studii asupra calculelor cristalografice, teoriile matematice asupra fenomenelor optice etc. Fizicianul şi chimistul găsesc un material pe cât de important pe atât şi de variat, pentru studiile lor experimentale, în proprietăţile fizice şi chimice a mineralelor; în fine naturalistul găseşte în mineralogia descriptivă material pentru a'şi exercita calităţile sale de observator, prin studiul proprietăţilor exterioare a mineralelor.

Graţie acestui nou aspect sub care se prezintă ştiinţa mineralogică, ea a devenit astăzi una din ştiinţele cele mai instructive şi mai atractive.

Partea I-a

Cristalografia Geometrică

CAP. I.

GENERALITĂŢI

Considerând un cristal, constatăm că el este terminat cu planuri, care formează *feţele* cristalului; apoi că aceste feţe se tae două câte două pentru a forma *muchiile*, care corespund unghiurilor diedre formate de feţe; în fine, că trei sau mai multe feţe pot să aibă un punct comun unde se întâlnesc diedrele feţelor considerate 2 câte 2, pentru a forma unghiuri poliedre, care se numesc *unghiurile solide* a cristalului. Deci feţele, muchile şi unghiurile solide sunt elementele ce trebue să considerăm în fiecare cristal. Intre numărul acestor elemente la fiecare cristal, există totdeauna o relaţiune importantă care permite a determina numărul unuia din ele, când cunoaştem pe a celor alte două. Insemnând cu F numărul feţelor, cu M numărul muchilor şi cu V numărul unghiurilor solide, avem totdeauna relaţiunea:

$$F + V = M + 2.$$

De unde deducem:

$$F = (M + 2) - V, \quad V = (M + 2) - F, \text{ şi } M = (F + U) - 2.$$

Aşa: la cub avem:

$$6 + 8 = 12 + 2.$$

La dodecaedrul romboidal:

$$12 + 14 = 24 + 2$$

La piramida hexagonală avem:

$$12 + 8 = 18 + 2.$$

Dacă considerăm o substanţă cristalizată, constatăm că forma feţelor se poate schimba în diversele forme compuse pe care acel corp le poate prezenta; deci forma feţelor nu e suficientă pentru a determina forma cristalină; dar, dacă determinăm valoarea unghiului diedru pe care-l formează două feţe determinate, constatăm că el îşi conservă valoarea ori care ar fi forma acelor feţe. Aşa: dacă considerăm un cub (Fig. 1) vedem că feţele au forma de patrate, iar unghiurile diedre au 90°. Dacă înlocuim unghiurile solide prin feţele octaedrului (Fig. 2) forma feţelor cubului devine octogonală, fără ca valoarea diedrului de 90° să se schimbe. De asemenea, dacă considerăm un Octaedru, forma feţelor este acea a unor triunghiuri ecvilaterale, formând între ele unghiuri de 109°30′ (Fig. 3). Dacă intervin modificaţiile pe unghiuri care conduc la feţele cubului forma feţelor octaedrului devine hexagonală, unghiul feţelor rămânând acelaş 109°30′ (Fig. 4). Deci: *constanţa unghiurilor* pe care feţele le fac între ele, este caracterul cel mai important, care poate servi la determinarea formelor cristaline. Va trebui dar să vedem care sunt metodele şi care sunt instrumentele ce servesc la măsurarea unghiurilor diedre a cristalelor.

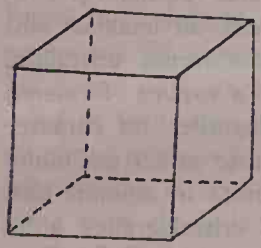


Fig. 1

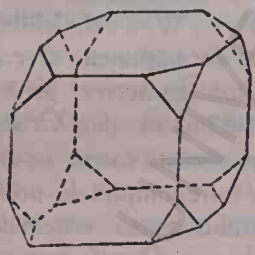


Fig. 2

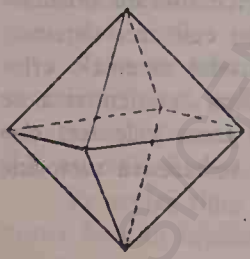


Fig. 3

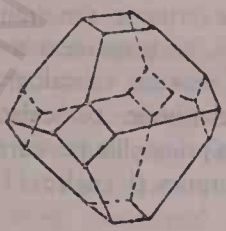


Fig. 4

Aparatele ce servesc la măsura unghiurilor diedre ale cristalelor se numesc *Goniometre*.

Diverse sisteme cristalografice. Numărul formelor cristaline ce prezintă mineralele este aşa de mare, încât studiul lor ar fi cu neputinţă, dacă nu am avea un mijloc de a le reuni in clase cu caractere comune. De aceia ştiinţa cristalografică nu a putut lua naştere decât după descoperirea clivajului de către abatele Haüy, care în studiile sale asupra carbonatului de Calciu ajunsese la ideia de *sistem cristalin*. Haüy admise că, toate formele cristaline se pot deduce dintr'un număr foarte restrâns de forme principale, pe care le numi *forme primitive*, iar celor deduse din ele, le dădu numele de *forme derivate* sau *secundare*; iar sub numele de *sistem cristalin* el înţelegea reunirea tuturor formelor care se pot deduce din o formă primitivă.

După Haüy, diverşi cristalografi, mai ales Germani şi Engleji, precum: Weiss, Rose, Whewel, Miller etc. au imaginat alte metode pentru a explica formaţiunea diverselor forme cristaline, şi au insistat asupra altor caractere pentru a explica formarea sistemelor cristaline, căutând să dea Cristalografiei un caracter mai mult geometric. Din această cauză se cunosc astăzi mai multe *sisteme cristalografice* întrebuinţate de preferinţă în anumite ţări. Aşa: în Franţa se întrebuinţează sistemele cristalografice a lui *Haüy* perfecţionat *de Levy* şi *Descloizeaux*, şi sistemul lui *Bravais* perfecţionat de *Mallard*. In Germania se întrebuinţează sistema lui *Weiss* modificată şi perfecţionată de *Rammelsberg* şi *Naumann*. In fine în Anglia se întrebuinţează numai sistema cristalografică a lui *Whewel* perfecţionată de *Miller*.

De oare ce este admis astăzi, ca în orice lucrare cristalografică, notaţiunile să fie exprimate simultan în cele trei sisteme: Levy, Naumann şi Miller, ne propunem a studia sistemele cristaline paralel în cele trei sisteme cristalografice; şi pentru a se putea înţelege mai uşor relaţiunile ce există între cele trei sisteme, vom începe a studia principiile pe care se bazează metodele cristalografice: francez, german şi englez.

CAP. II.

PRINCIPIILE SISTEMELOR CRISTALOGRAFICE

I.

Sistemele cristalografice franceze.

După cum am spus deja, sunt două sisteme cristalografice franceze: *Sistema lui Levy* şi *sistema lui Bravais.*

Sistema lui Levy. Romé de l'Isle este cel întâi care a încercat să grupeze cristalii în 6 clase după forma feţelor şi valoarea unghiurilor ce fac aceste feţe între ele. Dar Haüy a fost acel care pentru prima oară prezintă lucrurile sub o formă bine definită, servindu-se de proprietatea clivajului pe care el o descoperise. El admite că, dacă găsim într'un mineral trei planuri de clivaj deosebite, aceste planuri determină un solid prismatic cu o formă bine definită constantă, căruia îi dădu numele de *formă primitivă.* El observă pentru prima dată această proprietate pe un cristal de Carbonat de Calciu, (Fig. 5) care prezenta o faţă *abcd* în locul unei muchi bazice. Încercând să obţină prin clivaj, feţe analoage pe celelalte muchi, el constată că: trei muchi alterne între ele de la baza superioară, şi trei muchi de la baza inferioară, alterne cu cele de sus, sunt susceptibile de a fi înlocuite prin câte o faţă. Continuând clivajul către centrul cristalului, el obţinu un alt solid, ce avea forma unui romboedru, care se găsea ca un sâmbure în mijlocul cristalului hexagonal de Calcită.

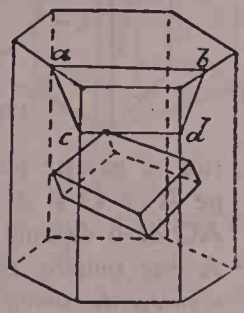


Fig. 5

Această descoperire a condus pe Haüy, mai întâi la teoria descreşterilor şi apoi la *teoria trunchieturelor,* care i-a permis de a explica obţinerea formelor secundare, înlocuind unghiurile solide sau muchile formelor primitive prin feţe.

In acelaş timp Haüy constată că, această înlocuire nu se putea face în orişice mod, dar numai după o lege, pe care el o anunţă pentru prima oară sub numele de: *Legea de simetrie.*

Această lege se enunţă astfel:

Când o modificaţie are loc pe un element a unui cristal, toate elementele simetrice a cristalului trebue să fie modificate în acelaş mod. Aşa: toate muchile cubului fiind egale

(Fig. 6) ele vor fi modificate toate în acelaş timp şi în acelaş mod. (Fig. 7). De asemenea: într'o prismă dreaptă rombică, muchile laterale sunt asemeni geometriceşte (Fig 8) dar nu şi cristalograficeşte, căci două din ele corespund unor diedre obtuze (Fig. 9) şi se vor modifica împreună, iar celelalte două corespunzind unor diedre ascuţite, se vor modifica iarăşi împreună (Fig. 10).

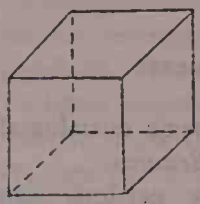


Fig. 6

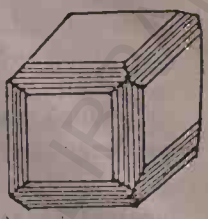


Fig. 7

Pentru a se înţelege mai bine explicaţia acestei legi, să amintim în câteva cuvinte principiile relative la simetrie.

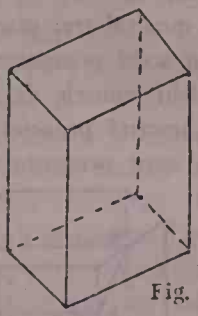


Fig. 8

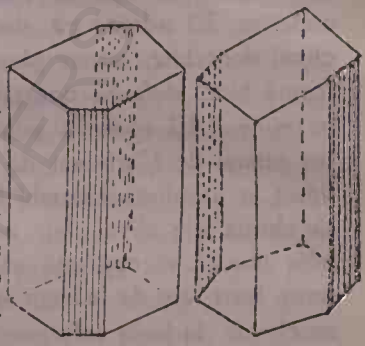


Fig. 9 Fig. 10

Să considerăm punctul O în faţa căruia se găseşte punctul A; să unim pe A cu O şi să prelungim dreapta AO de o distanţă OA' aşa ca: AO = OA'. Zicem că: punctul A este simetric cu A' în raport cu punctul O care se numeşte *Centru de simetrie*. (Fig. 11).

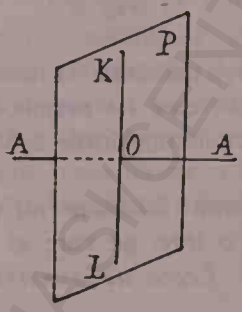


Fig. 11

Să considerăm dreapta KL care trece prin punctul O; să scoborâm din A perpendiculara AO pe KL, şi să o prelungim până în A', aşa ca: AO=OA'. Punctele A şi A', vor fi simetrice în raport cu dreapta KL, care se numeşte *Axă de simetrie*.

In fine dacă considerăm planul P, care conţine dreapta KL şi în faţa lui punctul A, şi dacă scoborâm perpendiculara AO pe plan şi o prelungim de distanţa OA'=OA, atunci punctele A şi A' sunt simetrice în raport cu planul P, care se numeşte: *Plan de simetrie*.

Dacă vom considera dară un cristal, în cazul cel mai general vom găsi în el, ca elemente de simetrie: Un centru de

simetrie, una sau mai multe axe de simetrie şi unul sau mai multe planuri de simetrie. In ce priveşte valoarea simetriei unei axe, ea poate varia. Se zice în general că o axă are simetria n, când trebue să întoarcem solidul de un unghiu de $\frac{360^0}{n}$ în jurul acestei axe, pentru ca el să se prezinte cu acelaş aspect. Aşa: pentru o rotaţiune de $\frac{360^0}{2}$, $\frac{360^0}{3}$, $\frac{360^0}{4}$, sau $\frac{360^0}{6}$, vom ave axe de simetrie: *binară, ternară, cvaternară* sau *senară.*

Să luăm ca exemplu, o prizmă dreaptă cu baza de romb (Fig. 12). Dacă considerăm planul care trece prin muchile BF şi DH, zicem că acest plan este un *plan de simetrie*, căci, punctele A şi C, I şi I', E şi G, sunt simetrice în raport cu acest plan, căci avem:

$$CP = PA,\ IO = OI',\ EP' = P'G.$$

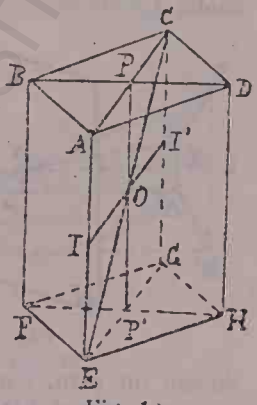


Fig. 12

Acelaş lucru pentru planul ce trece prin AE şi CG. Aceste două planuri se întâlnesc după dreapta PP', care uneşte centrele P şi P' a celor două baze; această dreaptă este o *axă de simetrie* şi simetria sa este *binară*. In fine dacă unim punctele C şi E prin o dreaptă, ea întâlneşte dreapta PP' în punctul O care este un *centru de simetrie* căci: $CO = OE$. In adevăr: triunghiurile CPO şi EOP', dreptunghice în P şi P', au unghiurile $POC = EOP'$ ca opuse, şi $PCO = OEP'$ ca alterne interne; apoi $EP' = PC$ ca jumătăţi de diagonale. Triunghiurile fiind egale vor avea: $CO = OE$.

Definiţia centrului de simetrie ne duce la o consecvenţă importantă. Dacă un poliedru are un centru de simetrie, urmează că, o dreaptă care trece prin centru, trebue să întâlnească suprafaţa poliedrului la distanţe egale de acest centru, deci va trebui să aibă feţele sale paralele două câte două; şi în reciproc: un poliedru care are feţele paralele două câte două, trebue să aibă un centru de simetrie. In general putem zice că: prezenţa unui număr oare care de elemente de simetrie, determină existenţa altor elemente de simetrie. Geometria, care a studiat relaţiunele dintre elementele de simetrie, ne dă un mare număr din ele, din care vom cita următoarele:

1) Când un cristal are un centru şi o axă de simetrie binară, trebue să aibă şi un plan de simetrie.

2) Când un cristal are două axe de simetrie binară, trebue să aibă şi pe a treia.

3) Două drepte simetrice în raport cu un plan pot fi făcute simetrice şi în raport cu un centru, care poate fi luat arbitrar pe acest plan. De asemenea: *dacă două figuri sunt simetrice în raport cu un centru, ele pot fi simetrice şi în raport cu un plan trecând prin acel centru.* Această proprietate fiind interesantă pentru cazurile de *hemitropie*, merită a fi studiată.

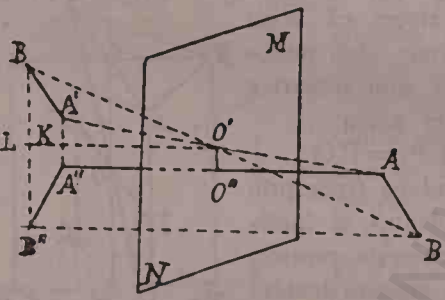


Fig. 13

Fie A şi A^1 două puncte simetrice în raport cu punctul O' conţinut în planul MN. (Fig. 13). Scoborâm apoi perpendiculara AO'' pe plan, şi o prelungim de o distanţă O''A'' = O''A până în A'', care este prin urmare simetric cu A în raport cu planul MN. Dacă ducem un plan, care să treacă prin A, A' şi A'', acest plan va avea cu planul MN o intersecţie O'O''. Dacă ducem în acest plan O'K paralelă cu AO''A'', este evident că, vom avea: O'A=O'A' şi AO''=O''A'', şi prin urmare şi A'K=KA'', căci $O'O'' = \frac{A'A''}{2}$. Considerând deci pe O'K drept axă şi învârtind punctul A'' de 180° în jurul acestei axe, el va cădea în A'. Deci punctul A'' simetric cu A în raport cu planul MN, a devenit în A' simetric cu A în raport cu centrul O'. Dacă considerăm dreapta AB, simetrica sa în raport cu planul MN este A''B'', care prin rotaţia în jurul lui O'K, ocupă poziţia A'B', care este simetrica lui AB în raport cu centrul O'.

— —

S'a zis mai înainte că Haüy descoperise clivajul şi că odată această operaţiune începută, el o presupune condusă până la ultima extremitate, obţinând astfel cea mai mică particulă, care păstrează forma solidului primitiv sau o altă formă. Acestei ultime particule Haüy 'i dă numele de *moleculă integrantă*. De aici el deduse teoria că: toate corpurile cristalizate sunt formate prin

juxtapunerea de molecule integrante după linii şi planuri paralele, iar pentru a explica deducerea formelor secundare din formele primitive, emite *teoria descreşterilor.*

Nu vom urmări pe Haüy în desvoltările necesare pentru susţinerea acestei teorii, dar vom lua numai un exemplu: deducerea dodecaedrului romboidal din cub. Să ne închipuim că pe o faţă a cubului se aplică o serie de lamele, având fiecare grosimea unei molecule integrante şi mai mică pe margina sa de o serie de molecule, aşa că, faţa cubului şi fiecare lamelă suprapusă rămâne descoperită pe margina sa cu un rând de molecule. Dacă continuăm această operaţie până ce ultima lamă aplicată se reduce la o moleculă, vom avea pe faţa cubului, aplicată o piramidă cu baza de patrat şi cu feţele nişte triunghiuri egale. Dacă facem această operaţiune pe cele şase feţe ale cubului constatăm că: două feţe triunghiulare adjacente aceleiaşi muchi a cubului, se află pe acelaş plan, aşa că unirea lor dă naştere unei singure feţe rombice. Deci, cele 24 feţe triunghiulare se vor combina două câte două în 12 feţe rombice egale, care vor constitui: dodecaedrul romboidal. Pentru a se aduce aminte suprapunerea lamelelor descrescătoare, Haüy numeşte această operaţie: *descreştere pe muchi.*

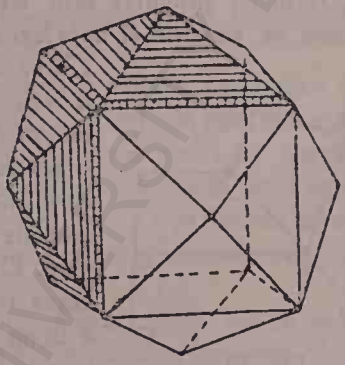


Fig. 14

Pentru a explica formarea octaedrului din cub, scoate moleculele integrante de pe unghiurile cubului, ceia ce face că, unghiurile sunt înlocuite prin feţe. Acesta e un exemplu de *descreştere pe unghiuri.*

Este uşor de văzut că: variind numărul moleculelor integrante ce se ieu, fie pe muchile fie pe unghiurile cubului, vom putea ajunge a explica deducerea tuturor formelor secundare ale sistemului cubic. Şi dacă, în loc de a pleca de la forma cubică, plecăm de la formele primitive ale diverselor sisteme cristaline, vom putea obţine toate formele derivate care există.

Tot lui Haüy se datoreşte o altă lege importantă, *legea derivaţiei*, pe care el o exprimă astfel:

Lungimele interceptate de o faţă pe muchile formei primitive, divizate prin dimensiunile formei primitive corespunzătoare acestor muchi, au între ele raporturi raţionale.

Această lege, este exprimată astăzi sub o formă mai clară, fiind că teoria descreşterilor a lui Haüy a fost înlocuită prin *teoria trunchieturilor*, în care înlocuim direct muchile sau unghiurile formelor primitive prin feţe, care înlocuire urmează mai întâi legea de simetrie şi apoi legea de derivaţie exprimată astfel: *Când două feţe modifică un unghiu a unui cristal, ele intercepteză pe muchi lungimi ce sunt între ele într'un raport simplu.* Fie faţa A'B'C' care modifică unghiul O, luând pe muchile OA, OB, OC, distanţele OA' = a, OB' = b, OC' = c. (Fig. 15). Dacă unghiul O este modificat de o a doua faţă IKL. este evident că, distanţele OI, OK, OL vor fi fracţiuni din OA', OB' şi OC', şi vom putea scrie:

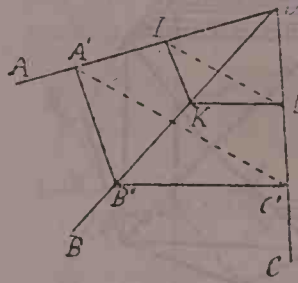


Fig. 15

$$OI = \frac{a}{q},\quad OK = \frac{b}{r},\quad OL = \frac{c}{s}$$

de unde: $\frac{a}{OI} = q,\ \frac{b}{OK} = r,\ \frac{c}{OL} = s.$

Cantităţile: q, r, s, fiind numere raţionale simple.

— După Haüy, unul din elevii săi *Delafosse* pentru a completa ideile profesorului său, căută să explice modul de derivare a formelor numite *hemiedrice*, care nu se puteau obţine urmând legea de simetrie. El a demonstrat, că, pentru a trece de la o formă primitivă la o formă derivată, trebue ca moleculele din care presupunem că sunt compuşi cristalii, să fie asemeni şi din punct de vedere geometrie şi din punct de vedere fizic; dar că, în unele cazuri forma geometrică a moleculei integrante poate să nu fie aceiaş ca a cristalului care o conţine. Aşa, în sistemul cubic molecula integrantă poate să aibă altă formă decât acea a cubului: ea poate fi de ex. *tetraedrică* şi atunci, dacă una din feţele cubului poate fi considerată ca formată prin juxtapunerea feţelor triunghiulare a moleculelor integrante tetraedrice, faţa paralelă cu aceasta va fi formată de vârfurile opuse feţelor tetraedrelor elementare. O parte a formelor hemiedrice, fiind caracterizate prin lipsa de feţe paralele, nu intrau în legea de simetrie, care cere

fețe paralele două câte două. Astăzi se explică formarea acestor forme hemiedrice cu fețe înclinate, admițând că numai jumătate din elementele simetrice se modifică.

Iată acum în rezumat principiile pe care se bazează sistema cristalografică franceză așa cum a exprimat-o Levy și cu perfecționările aduse de către Des Cloizeaux.

Mai întâi se consideră toate formele cristaline deduse prin truncheturi, din 7 forme primitive care sunt : *cubul, prizma patratică, prizma ortorombică, prizma hexagonală, romboedrul, prizma clinorombică* și *prizma asimetrică.*

După teoria truncheturilor, pentru a explica deducerea formelor secundare din formele primitive, se consideră ceie trei muchi ce formează un unghiu solid, și atunci putem zice : că *sistemul cubic* e caracterizat prin forma primitivă care are *trei muchi dreptunghiulare egale ;* la *sistemul patratic, trei muchi dreptunghiulare* din care *două orizontale egale și a treia verticala deosebită* etc.

Insă în Cristalografie ca și în chimie, avem nevoe de un *sistem de notațiune,* pentru a prescurta numirea formelor. Acest sistem de notațiune, imaginat mai întâi de Haüy, a fost perfecționat mai în urmă de Levy și apoi de către Des Cloizeaux.

Pentru notarea fețelor, se întrebuințează cele trei consoane de la începutul celor trei silabe a cuvântului *primitiv,* adică : *p, m* și *t.* Pentru notarea muchilor se întrebuințează : pentru cele bazice consoanele : *b, c, d, f,* iar pentru muchile laterale *g* și *h ;* în fine pentru unghiurile solide vocalele : *a, e, i* și *o.*

Ca exemplu general să luăm prizma asimetrică (Fig. 16); de ordinar se așază așa ca baza să fie înclinată de la stânga la dreapta și de îndărăt înainte, iar diedrul lateral obtuz să fie înainte. Fețele fiind două câte două egale și paralele, se va întrebuința litera *p* pentru a nota bazele, *m* pentru fața de la stânga și opusa sa, iar *t* pentru fața de la dreapta diedrului obtuz și opusa sa. Pentru notarea unghiurilor începem de sus în jos și de la stânga la dreapta : *a* pentru unghiul superior, *e* la stânga, *i* la dreapta, și *o*

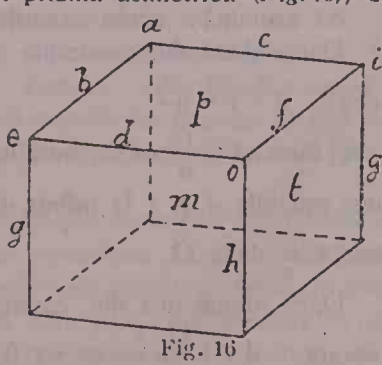


Fig. 16

pentru unghiul anterior. Pentru muchi avem: *b* şi *d* pentru muchile bazice la stânga, *c* şi *f* la dreapta, *g* pentru muchile laterale ascuţite şi *h* pentru cele obtuze.

Dacă trecem la sisteme mai simetrice, numărul literilor întrebuinţate pentru notaţiune devine mai mic, aşa că, ajungând la sistemul cubic, nu avem nevoe decât de 3 litere: *p* pentru feţe, *a* pentru unghiuri şi *b* pentru muchi.

Pentru a vedea cum se stabileşte notaţiunea unei feţe care modifică unul din elementele unui cristal, să luăm ca exemplu cazul cel mai general: să considerăm unghiul solid O al unei prizme asimetrice (Fig. 17) format de muchiile OA, OB şi OC, a căror lungime întreagă e însemnată; OA = d, OB = f, OC = h.

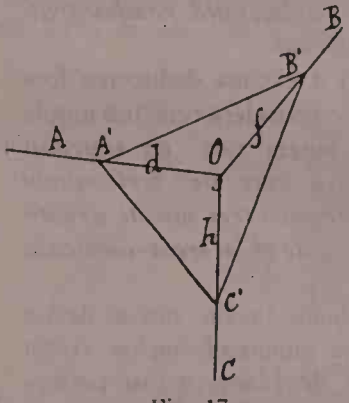


Fig. 17

O faţă oarecare A'B'C' interceptează pe muchi distanţele OA', OB', OC', care sunt fracţiuni din muchile întregi: vom putea deci scrie:

$$OA' = \frac{1}{x}d, \quad OB' = \frac{1}{y}f, \quad OC' = \frac{1}{z}h.$$

Avem astfel trei parametri, care determină faţa care va fi notată: $d^{\frac{1}{x}} f^{\frac{1}{y}} h^{\frac{1}{z}}$.

Aceasta este notaţia cea mai generală.

Să examinăm acum cazurile particulare ce se pot prezenta.

Dacă două din cantităţile *x*, *y*, *z* sunt zero, avem notaţiunea: $d^{\frac{1}{0}} f^{\frac{1}{0}} h^{\frac{1}{z}}$

Şi fiind că: $\frac{1}{0} = \infty$, notaţiunea precedentă însamnă că faţa atinge muchile *d* şi *f* la infinit, deci e paralelă cu faţa *p*, şi e la o distanţă $\frac{1}{z}$ de la O.

Dacă numai una din cantităţile *x*, *y*, *z* este zero, faţa va fi notată: $d^{\frac{1}{0}} f^{\frac{1}{y}} h^{\frac{1}{x}}$; ea va fi paralelă cu muchea *d* pentru că o atinge la $\frac{1}{0} = \infty$. Pentru a prescurta notaţiunea acestei

fețe, se scrie litera ce notează muchea, dându-i-se ca exponent cocientul între distanțele luate pe celelalte două muchi

$$d^{\frac{1}{y}} : \frac{1}{z} = d^{\frac{z}{y}}$$

Când avem: $y = z$ notațiunea devine: d^1. Pentru o față paralelă cu h vom avea notațiunea generală: $d^{\frac{1}{x}} f^{\frac{1}{y}} h^{\frac{1}{o}} = h^{\frac{y}{x}}$.

Fiind că o asemenea față, după valorile relative a lui x și y, se poate înclina la stânga sau la dreapta, pentru a le deosebi scriem: $\frac{y}{x}h$ sau $h\frac{v}{x}$.

Dacă în notațiunea generală: $x = y$ ea devine:

$$d^{\frac{1}{x}} f^{\frac{1}{x}} h^{\frac{1}{z}}$$

atunci notațiunea feței se prescurtează și devine:

$$0^{\frac{1}{x}} : \frac{1}{z} = 0^{\frac{z}{x}}$$

Când și $x = z$ avem: 0^1.

Sistema lui Bravais. Sistema cristalografică a lui Bravais este bazată pe considerațiuni cu totul deosebite de acele a lui Haüy și a succesorilor lui. El pleacă mai întâi de la ideia că: toate corpurile fiind compuse din molecule, se poate întâmpla ca aceste molecule să fie orientate într'un mod oarecare, și în acest caz corpul este *amorf*; sau că moleculele sunt orientate după direcțiuni bine definite și atunci corpul este cristalizat. Se constată în adevăr că în corpurile cristalizate, diversele proprietăți fizice precum: viteza de propagare a luminei, coheziunea, duritatea etc. sunt aceleași pe direcțiuni paralele.

Ideile lui Bravais expuse în mai multe publicațiuni, au fost adunate și publicate sub titlul: *Etudes cristalographiques* de către Elie de Beaumont. Ideile și teoriile lui Bravais au fost puse sub o formă mai ușoară de înțeles de către *Mallard*. Iată în rezumat expunerea lui.

Ideile lui Haüy asupra constituției corpurilor cristalizate așa cum el le expusese, nu erau nici complecte nici generale. Pentru a le complecta, Bravais a imaginat ideia simplă a *homogeneității*. Un corp solid este considerat ca homogen, când prezintă în toate părțile sale aceleaș caractere, precum: duritate, densitate, clivaj etc. El trebue să fie compus din particule dispuse uniform în toate senzurile, așa încât, dacă o dreaptă oarecare străbate acest

corp pe o lungime *l*, ea trebue să întâlnească un număr *n* de aceste particule, aşa că, distanţa $\frac{l}{n}$ între aceste particule să rămână constantă, ori care ar fi direcţia în care linia străbate corpul. Insă în corpurile cristalizate homogeneitatea nu poate fi considerată în acest mod în toate direcţiunile, şi va trebui să examinăm în ce mod ea variază în diversele cazuri care se pot prezenta.

Vom admite dar că, fiecare corp solid homogen este compus din un număr mare de puncte foarte apropiate, care reprezintă centrele de greutate ale moleculelor ce constitue corpul; apoi că, aceste puncte sunt distribuite astfel încât, dacă reunim două dintre ele prin o dreaptă, şi dacă o prelungim la dreapta şi la stânga, ea trebue să întâlnească alte puncte la distanţe egale: aceste puncte se numesc: *puncte homoloage*.

Să considerăm deci în interiorul unui corp homogen un punct A (Fig. 18). După principiul homogeneităţii trebue ca: dacă ducem prin punctul A o dreaptă oarecare Ax, ea trebue să întâlnească la distanţe egale alte puncte homoloage: a, a', a''... aşa că distanţele Aa, aa', a'a ....să fie egale între ele. Acest şir de puncte homoloage constitue un *rând*. Dacă considerăm în o altă direcţie Ay, un punct homolog *b*, dreapta Ab prelungită trebue să întâlnească alte puncte homoloage, b', b''... aşa ca: Ab = bb' = b'b'' = ... distanţa Ab putând să fie deosebită de Aa. Dacă transportăm dreapta Ax paralel cu ea însăşi aşa ca punctul A să ocupe pe Ay succesiv poziţiunele b, b' b'', diversele puncte homoloage a, a' a''... vor ocupa poziţiunnile a_1, a_1', a_1''... şi atunci în planul xAy se va forma o *reţea* compusă din un număr infinit de ochiuri cu formă paralelogramică, a căror *noduri* sunt formate de punctele homoloage.

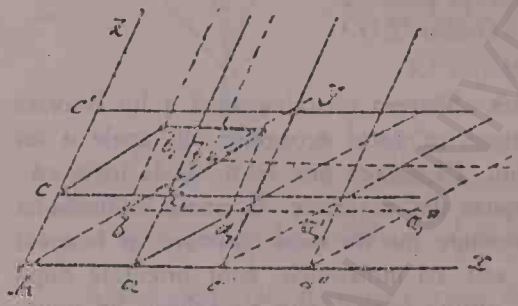


Fig. 18

In fine într'o altă direcţiune Az vom găsi un punct homolog *c* la o distanţă Ac deosebită de Aa şi Ab; pe direcţia Az vom întâlni alte puncte homoloage c', c'' la distanţe egale: Ac = cc' = c' c'' = ... Dacă acum considerăm că reţeaua xAy' se mişcă

paralel cu ea însuşi aşa ca punctul A să ocupe succesiv poziţiunile c, c', c''... pe direcţia Az, spaţiul cuprins între cele trei planuri xAy, yAz şi zAx va fi împărţit într'o infinitate de mici paralelipipede goale, a căror unghiuri vor fi formate de puncte homologe, a căror distanţe sunt deosebite în cele trei direcţiuni Ax, Ay şi Az. Se formează atunci aceea ce Bravais numeşte *un sistem reticular.*

Este evident că natura acestor sisteme reticulare va varia: mai întâi după valoarea unghiurilor ce fac între ele cele trei direcţiuni a rândurilor Ax, Ay şi Az, şi apoi după valoarea distanţelor Aa, Ab, Ac, care se cheamă *parametrii* sistemului reticular. Dând acestor cantităţi, unghiuri şi parametri, diverse valori, vom obţine cele 7 sisteme reticulare a lui Bravais.

1) Presupunem că direcţiunile Ax, Ay şi Az a rândurilor sunt dreptunghiulare: $zAx = zAy = xAy = 90^0$ şi că parametrii corespunzători sunt egali: Aa=Ab=Ac. (fig. 19). Atunci paralelipipedele devin cuburi şi sistemul reticular se numeşte *terquaternar:* vom vedea mai pe urmă cauza acestei numiri.

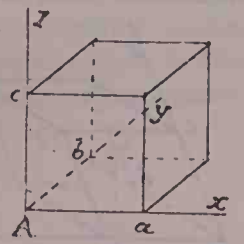


Fig. 19

2) Când direcţiunile rândurilor rămân dreptunghiulare, şi doi din parametri Aa şi Ab sunt egali, iar al treilea Ac deosebit (fig. 20) atunci forma solidului elementar devine o prismă dreaptă cu baza de patrat, şi sistemul reticular se numeşte: *cvaternar.*

3) Dacă direcţiunile rândurilor rămân dreptunghiulare, iar cei trei parametri sunt deosebiţi, (fig. 21) atunci forma solidului elementar devine o prismă dreaptă cu bază de dreptunghiu, iar sistemul reticular se numeşte *terbinar.* El corespunde cu sistemul ortorombic a lui Levy.

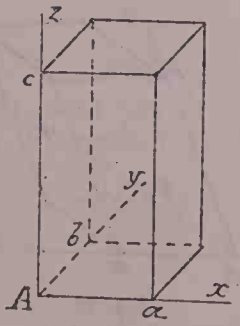


Fig. 20

4) Considerăm acum un sistem în care direcţia verticală a rândurilor este normală pe celelalte două, care formează între ele un unghiu de 60^0, şi care au parametrii egali. In acest caz ochiurile reţelei sunt nişte romburi. (fig. 22) Dacă ducem drepte care să reprezinte diagonalele mici ale romburilor, se obţine o reţea cu ochiuri triunghiulare şi cu laturi

egale, sau cu ochiuri hexagonale. Dacă punctul A se mişcă pe direcţia verticală se obţine un sistem compus din prizme cu bază triunghiulară *abo* sau cu bază hexagonală *abcdef*. Acest sistem reticular se numeşte *senar*.

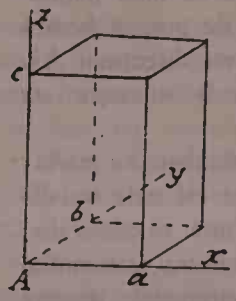


Fig. 21

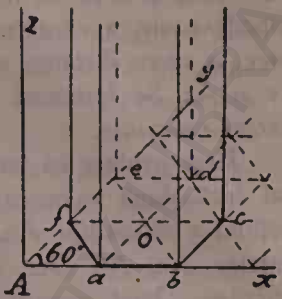


Fig. 22

5) Sistemul *ternar* se poate obţine astfel: Să presupunem că cele trei direcţiuni a rândurilor formează între ele unghiuri egale şi că, ochiul reţelei este rombic. (fig. 23). Mişcându-l astfel ca punctul A să ocupe poziţia c, aşa ca distanţele $Ac = Aa = Ab$, vom obţine un sistem reticular compus din romboedre elementare.

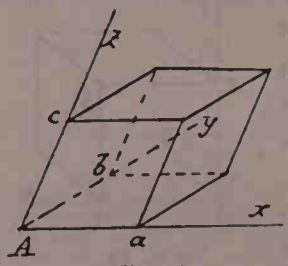


Fig. 23

6) Să luăm cele trei direcţiuni de rânduri aşa fel ca să avem unghiurile $zAx = zAy$ dar deosebit de xAy, şi parametrii $Aa = Ab$ însă diferiţi de Ac. (fig. 24). Se va obţine astfel o reţea rombică, care mişcându-se pe direcţia Az, va da naştere la nişte solide elementare având forma unor prizme oblice cu baza de romb. Se obţine astfel sistemul reticular *binar*.

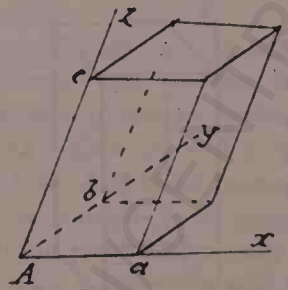


Fig. 24

7) Dacă considerăm direcţiunile rândurilor ca formând între ele unghiuri diferite, şi că cei trei parametri, sunt de asemenea toţi diferiţi, $Aa > < Ab > < Ac$ şi $\alpha > < \beta > < \gamma$. se obţine o reţea cu ochiuri paralelogramice, care prin mişcare dă naştere la nişte solide elementare având forma de paralelipipede, care formează sistemul reticular *asimetric*. (fig. 25).

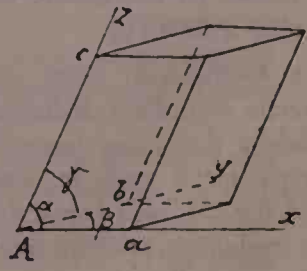


Fig. 25

Pentru studiul formelor cristaline, Bravais consideră forma ochiului reţe-

lei şi axele de simetrie, făcând diverse supoziţii asupra relaţiunilor ce există între ele. Pentru notaţiune se serveşte de parametri, pe care-i deduce din caracteristicele rândurilor şi a planurilor reticulare. Pentru calculele cristalografice el face uz de proecţiile stereografice, dar mai ales de cele gnomonice.

II.

Sistemele cristalografice germane

Notaţiunea lui Weiss şi Rose. Am văzut că, cristalografii francezi consideră, în sistema lui Levy, formele primitive şi deduc formele secundare prin truncheturi; în acest caz trebue să considerăm cele trei muchi ce concurează la formarea unui unghiu solid. Cristalografii germani au voit a se sustrage necesităţii formelor primitive, şi, dând cristalografiei un caracter cu totul geometric, au luat ca bază sistemelor lor cristalografice existenţa axelor. După Weiss şi Rose se consideră axele, care se întâlnesc în centrul cristalului. Ştim în adevăr că poziţiunea unui punct în spaţiu e determinată când se cunosc distanţele acestui punct la trei drepte care se chiamă *axe de coordonate*; aceste drepte pleacă din acelaş punct, care se chiamă *origină*, iar distanţele punctului la axe se numesc *coordonatele* punctului. Dacă considerăm axele Ox, Oy, Oz, (Fig. 26), direcţiunile astfel considerate sunt pozitive, pe când prelungirile lor dincolo de O, Ox', Oy' şi Oz' sunt direcţiunile negative. Dacă considerăm axele două câte două, ele formează trei planuri numite: *planuri de coordonate.* Dacă considerăm un plan care tae axele de coordonate în punctele H, K, L, la distanţele OH, OK, OL de la origină, poziţiunea acestui plan va fi determinată, când se vor cunoaşte distanţele OH OK şi OL ce se numesc *parametrii* planului sau a feţei H K L (Fig. 27).

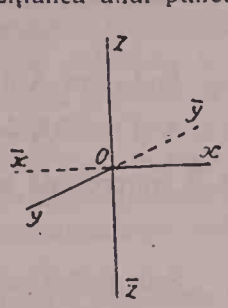


Fig. 26

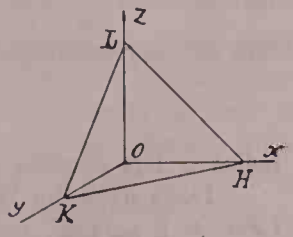


Fig. 27

Weiss şi Rosse, admit axele, care luate egale cu 1, sunt caracterizate prin litere: aceste litere pot să fie aceleaşi sau di-

ferite în parte sau în totalitate după lungimea axelor. Când o față atinge axele la extremități, simbolul acelei fețe e reprezentat prin raportul parametrilor.

Dar dacă fața atinge axele la distanțe mai mici sau mai mari de cât parametrii fundamentali, pentru a nota această față, facem ca fiecare literă corespunzătoare parametrilor, să fie precedată de o *caracteristică*, care indică distanța la care fața atinge axa corespondentă. Să luăm un caz general: Să admitem trei axe dreptunghiulare cu parametri neegali (Sistemul ortorombic) și să punem:

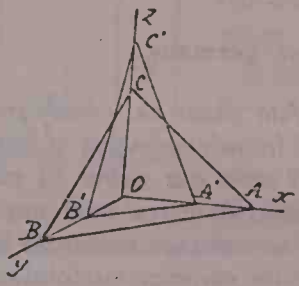


Fig. 28

$$OA = a,\ OB = b,\ OC = c.$$

a, b, c fiind parametrii fundamentali corespunzetori axelor Ox, Oy, Oz, (fig. 28). Fața A B C care atinge axele la extremități, va fi reprezentată prin simbolul:

$$a : b : c.$$

Insă, fața A'B'C', care ia pe axe lungimele:

$$OA' = \frac{1}{m}a,\quad OB' = \frac{1}{n}b,\ \text{și}\ OC' = pc.$$

va fi reprezentată prin simbolul:

$$\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : pc.$$

Sau făcând să dispară numitorii:

$$na : mb : mnpc.$$

Și dacă una din cantitățile m,n,p, devine zero, atunci avem caracteristica: $\frac{1}{o} = \infty$, și atunci fața este paralelă cu axa afectată de caracteristica ∞.—Așa de ex: simbolul:

$$\infty a : \frac{1}{n}b : pc.$$

indică o față paralelă cu axa Ox.

Dacă axele lui Weiss și muchile formelor primitive ale lui Levy ar fi paralele, transformarea notațiunelor ar fi foarte ușoară; însă fiindcă nu este așa, trebue căutate formule de transformare.

Notațiunea lui Naumann. Naumann a simplificat mult notațiunea lui Weiss. Deși el admite aceleași axe, uneori le pune

în o ordine deosebită. Pentru sistemul cubic, parametrii fundamentali sunt aceiaşi, notaţi cu litera *a*; pentru sistemul patratic, pe care el îl numeşte tetragonal, cele două axe orizontale sunt egale, dar deosebite de axa verticală; parametrii sunt: *a* pentru axele orizontale şi *c* pentru axa verticală; şi aşa mai departe pentru celelalte sisteme.

Naumann face aşa încât una din caracteristicele axelor să fie egală cu 1, şi apoi întrebuinţează notaţiuni şi nu simboluri.

Pentru notaţiune el procedează astfeliu: admite ca formă fundamentală Piramida, şi notează cu litera *P*, iniţiala cuvântului piramidă, orice faţă ce atinge axele la extremităţi. Ca excepţiune avem: Sistemul cubic pentru notarea formelor căruia, întrebuinţează litera O, iniţiala cuvântului Octaedru; şi sistemul Romboedric, la care întrebuinţează litera *R* iniţiala cuvântului Romboedru. Pentru oricare altă formă chiar piramidală, care atinge cele două axe la distanţe diferite de 1, el întrebuinţează caracteristice, care sunt scrise înainte sau după literile P, O, sau R. Să luăm un exemplu: piramida ortorombică este însemnată de Weiss cu simbolul: a : b : c, pe când Naumann o însamnă cu notaţiunea *P*. Dar sunt piramide a căror feţe ating axele orizontale la extremităţi, iar axa verticala la distanţe diferite de 1. După Weiss avem simbolul: a : b : mc, *m* fiind $>< 1$. Naumann face să precedeze notaţiunei P, caracteristica ce afeţtează axa verticală, pe când caracteristica corespunzătoare uneia din axele orizontale este scrisă după litera P. Atunci notaţiunea corespunzătoare simbolului precedent va fi: *m P*.

Dar dacă feţele piramidei tae una din axele orizontale la o distanţă deosebită de 1, vom ave simbolul:

na : b : mc sau a : nb : mc

cărora corespunde notaţiunea: *mPn*.

Insă pentru a deosebi formele corespunzătoare celor două simbole a lui Weiss, Naumann observă că primul simbol se referă la o faţă care atinge mica diagonală a rombului de bază la o distanţă mai mare de cât 1; este deci faţa unei piramide lungită după mica diagonală, pe când al doilea simbol se referă la o faţă care atinge diagonala mare la o distanţă mai mare decât 1. Pentru a le distinge el întrebuinţează numele de *Brahidiagonală* pentru diagonala cea scurtă şi *Macrodiagonală* pentru diagonala lungă; atunci numeşte *Brahipiramidă* pe cea întâi şi o notează:

$m P \overline{n}$; pe când pe a doua o numeşte *Macropiramidă* şi o notează: $m P \overline{n}$.

După cele ce am văzut până acum, sistemul de notaţiune a lui Naumann, ca şi cel a lui Levy, este un sistem general, adică: notaţiunea reprezintă în acelaş timp solidul întreg precum şi fiecare din feţele lui.

III.

Sistemul cristalografic englez

Notaţiunea lui Miller. De oarece notaţiunea cristalografică a lui Miller se face în *Indici*, să vedem mai întâi definiţia lor. Să considerăm planul HKL a cărui parametri sunt: OH, OK şi OL ⟨Fig. 29⟩. Dacă mişcăm planul acestei feţe paralel cu sine însuşi, în poziţia H'K'L' parametrii săi vor deveni OH', OK', OL', aşa că putem scrie:

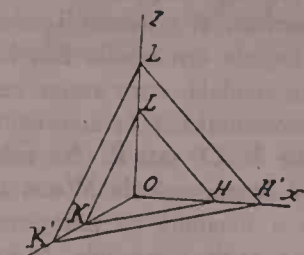


Fig. 29

$$OH' = OH \times m,\quad OK' = OK \times n,\quad OL' = OL \times p.$$

De unde deducem:

$$\frac{OH'}{OH} = m,\quad \frac{OK'}{OK} = n,\quad \frac{OL'}{OL} = p.$$

Fiind că feţele HKL şi H'K'L' sunt paralele, laturile omoloage sunt şi ele paralele, şi atunci triunghiurile OKL şi O'K'L' etc. sunt asemeni, şi vor avea deci laturile omoloage proporţionale; vom avea deci:

$$\frac{OH'}{OH} = \frac{OK'}{OK} = \frac{OL'}{OL} = m = n = p.$$

de unde: $OH' = OH \times m$, $OK' = OK \times m$, $OL' = OL \times m$. Deci: *transportând faţa HKL paralel cu ea însăşi, parametrii acestei feţe au fost multiplicaţi cu aceiaşi cantitate constantă.*

Să considerăm acum faţa HKL a cărei parametri *cunoscuţi* sunt: OH, OK, OL; ⟨Fig. 30⟩ acesta este *planul principal.* Fie o altă faţă ABC, a cărei parametri OA, OB, OC sunt

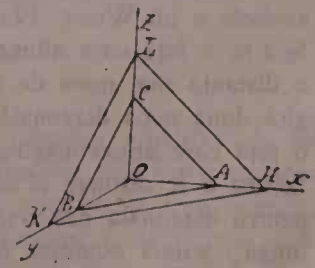


Fig. 30

necunoscuți. Pentru a determina această din urmă față, este de ajuns a cunoaște raportul d'între parametrii feței cunoscute și acei ai feței necunoscute. Fie :

$$\frac{OH}{OA} = h, \quad \frac{OK}{OB} = k, \quad \frac{OL}{OC} = l.$$

de unde :

$$OA = \frac{OH}{h} \quad OB = \frac{OK}{k} \quad OC = \frac{OL}{l}$$

Deci fața ABC va fi determinată dacă vom cunoaște parametrii OH, OK, OL și raporturile : h, k, l. Dacă fața HKL este cunoscută, putem pune parametrii săi egali cu unitatea :

$$OH = OK = OL = 1.$$

atunci vom avea :

$$\frac{1}{OA} = h, \quad \frac{1}{OB} = k, \quad \frac{1}{OK} = l.$$

Noile valori a lui h, k, l, care sunt *inversele parametrilor* feței necunoscute, se numesc : *Indicii feței.*

Este ușor de văzut că, dacă axele lui Levy și Miller coincid, indicii lui Miller sunt inversele caracteristicelor lui Levy, Așa : din notațiunea lui Levy : $b^1 \; b^{\frac{1}{2}} \; b^{\frac{1}{3}}$ deducem notațiunea lui Miller : ‹120›.

Trebue de la început să observăm că, indicii trebue să fie totdeauna numere întregi și raționale. Să admitem că, pentru cele două fețe precedente avem :

$$OH = 1, \; OK = 2, \; OL = 3, \; OA = 2, \; OB = 3, \; OC = 4$$

Vom avea pentru valoarea indicilor :

$$h = \frac{OH}{OA} = \frac{1}{2}, \quad k = \frac{OK}{OB} = \frac{2}{3}, \quad l = \frac{OL}{OC} = \frac{3}{4}.$$

Sau aducând la forma întreagă :

$$h = \frac{1.3.4}{2.3.4} = 12. \quad k = \frac{2.2.4}{3.2.4} = 16, \quad l = \frac{3.3.2}{4.2.3} = 18$$

sau $h = 6$, $k = 8$, $l = 9$. Fața să fie notată : ‹689›.
Notațiunea generală a unei fețe în indici va fi deci : ‹hkl›.

Dar această notațiune poate să varieze după valorile indicilor. Se pot prezenta următoarele cazuri :

1) Să admitem că $l = 0$, atunci notațiunea devine : ‹hko›

Dacă $l = 0$ vom avea: $\frac{OL}{OC} = 0$. Insă OL este constant şi diferit de zero; deci va trebui să avem: $OC = \infty$, şi atunci avem: $\frac{OL}{\infty} = 0$. Aceasta însamnă că faţa notată ⟨hko⟩ atinge axa Oz la infinit, deci este paralelă cu această axă. Rezultă dar că:

Dacă într'o notaţiune, unul din indici este zero, faţa astfel notată este paralelă cu axa în raport cu care indicele este zero.

Astfeliu, notaţiunea ⟨hol⟩ reprezintă o faţă paralelă cu axa y, şi ⟨okl⟩ o faţă paralelă cu axa *x*.

2. Dacă doi indici sunt zero, faţa notată este paralelă cu planul axelor în raport cu care indicii sunt zero. Aşa: faţa ⟨hoo⟩ având k=o e paralelă cu axa y, şi având l=o este paralelă cu planul yOz. Cu alte cuvinte: *O notaţiune care are doi indici zero, reprezintă unul din planurile de coordonate, sau un plan paralel cu acesta.*

Sistemul de notaţiune a lui Miller este fără îndoială cel mai perfect. Şi fiindcă el tinde a înlocui celelalte sisteme de notaţiune, ne propunem de a stabili şi a studia principalele proprietăţi, precum şi cele mai importante relaţiuni, care există între indicii.

Vom stabili mai întâi, *o relaţiune ce există între indicii unei feţe, lungimea axelor, şi unghiurile ce face normala la faţă cu axele.*

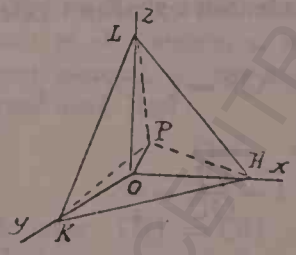


Fig. 31

Să considerăm faţa HKL şi normala OP la această faţă; ⟨Fig. 31⟩. Să unim punctul P cu punctele: H, K, L. Se obţin triunghiurile dreptunghiulare HOP, KOP, LOP, care ne dau relaţiile următoare:

$$\frac{OP}{OH} = \cos POX,$$

$$\frac{OP}{OK} = \cos POY$$

$$\frac{OP}{OL} = \cos PO\Xi.$$

şi deducem: $OP = \odot H \cos POX = OK \cos POY = OL \cos PO\Xi$ ⟨1⟩ Dacă însamnăm cu: *a*, *b* şi *c* parametrii planului principal şi cu *h*, *k*, *l* indicii feţei HKL avem: $h = \frac{a}{OH}$ $k = \frac{b}{OK}$ $l = \frac{c}{OL}$

de unde : $OH = \frac{a}{h}$ $OK = \frac{b}{k}$, $OL = \frac{c}{l}$

Inlocuind aceste valori în ecvaţia ⟨1⟩ avem :

$$OP = \frac{a}{h} \cos POX = \frac{b}{k} \cos POY = \frac{c}{l} \cos PO\Xi \ldots \langle 2 \rangle$$

Această ecvaţie, care este foarte importantă şi de care avem a ne servi mai târziu, se poate simplifica în cazuri anumite.

Când faţa HKL devine paralelă cu Ox, avem :

$h = \frac{1}{\infty} = o$. Deci $\cos POX = o$, şi ecvaţia ⟨2⟩

devine : $$OP = \frac{b}{k} \cos POY = \frac{c}{l} \cos PO\Xi \ldots \langle 3 \rangle$$

Când faţa HKL e paralelă şi cu Ox şi cu Oy, avem : $h = o$ şi $k = o$. Deci : $\cos POX = 0$ şi $\cos POY = 0$. Atunci ecvaţia ⟨2⟩ se reduce la :

$$OP = \frac{c}{l} \cos PO\Xi \ldots \langle 4 \rangle.$$

— —

Să considerăm o prizmă hexagonală înscrisă în o sferă : ⟨Fig. 32⟩ din centrul C al cristalului care e şi centrul sferei, să scobarâm perpendiculare pe feţele prizmei şi să le prelungim până la întâlnirea sferei în punctele *e', f', g'* : aceste puncte se numesc *polii* feţelor considerate. Observăm în acelaş timp că, feţele laterale *abcd, abrs* etc. sunt paralele cu cu aza z z, şi prin urmare şi intersecţiile acestor feţe : *ab, cd, rs* etc. vor fi paralele cu axa z $\bar{z}$. Feţele astfel aşezate se zice că *sunt în zonă*, iar axa z $\bar{z}$ se numeşte *axa zonei*. Dacă prin centrul C al sferei ducem un plan orizontal, acesta va determina pe sferă un cerc mare, în planul căruia se vor afla perpendicularele Cee', Cff', etc. iar punctele e', f',.... polii feţelor se vor afla pe circonferenţa cercului orizontal. Urmează dar că : *polii feţelor în zonă sunt situaţi pe circonferenţa aceluiaş cerc mare.*

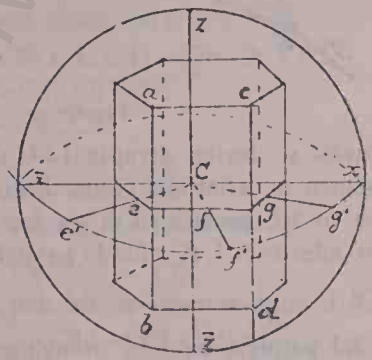


Fig. 32

Chestiunile pe care avem să le studiem relativ la feţele în zonă, se readuc la căutarea relaţiunilor ce există între indicii feţelor în zonă şi indicii axei de zonă. In adevăr : dacă presupunem

că, o față face parte din o zonă, a cărei axă este o dreaptă. Ox, și din altă zonă a cărei axă este Oy, este evident că fața fiind paralelă cu Ox și Oy, va fi paralelă cu planul acestor drepte.

Mai întai vom stabili: *relațiunea ce există între indicii a două fețe care formează o zonă și indicii axei de zonă.*

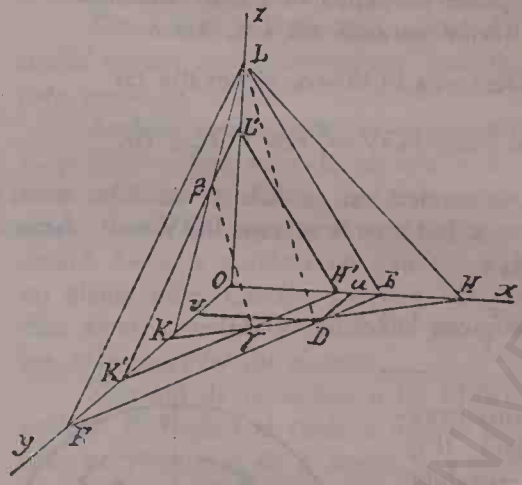


Fig. 33

Să considerăm sistemul de trei axe dreptunghiulare Ox, Oy, Oz și două fețe HKL și H'K'L' care se taie după βγ, care determină direcțiunea axei de zonă a celor două fețe. (Fig. 33). Dacă mișcăm fața H'K'L' paralel cu ea însăși, până ce trece prin L, atunci intersecția βγ se mișcă paralel cu ea însăși și devine dreapta LD. Această nouă intersecție ne va servi pentru a defini axa zonei. Prin mișcarea feței H'K'L' paralel cu ea însăși, parametrii ei au fost înmulțiți cu o cantitate constantă. In adevăr: L'K' fiind paralelă cu LF, triunghiurile OK'L' și OFL sunt asemeni și ne dau: $\frac{OF}{OK'} = \frac{OL}{OL'}$. De asemenea H'L' fiind paralelă cu EL, triunghiurile OH'L' și OEL sunt asemeni și ne dau:

$$\frac{OE}{OH'} = \frac{OL}{OL'} \text{ și } \frac{OL}{OL'} = \frac{OL}{OL'}.$$

Din aceste trei relațiuni se deduce:

$$OF = OK' \frac{OL}{OL'},\quad OE = OH' \frac{OL}{OL'} \text{ și } OL = OL' \frac{OL}{OL} \quad \ldots \quad (a)$$

Pentru a determina intersecția LD, e de ajuns să cunoaștem parametrii punctelor L și D. Avem atunci:

Pentru L . . . $x = o,\ y = o,\ z = OL.$

« D . . . $x = Ou,\ y = Ov,\ z = O.$

Va trebui dar să găsim valorile lui OL, Ou și Ov. In figura

precedentă observăm că: în triunghiul OHK. dreapta uD este paralelă cu OK şi deci avem:

$$\frac{OK}{uD} = \frac{OH}{uH} \text{ sau } \frac{OK}{uD} = \frac{OH}{OH-Ou} \quad \ldots \langle\beta\rangle$$

De asemenea în triunghiul OEF, avem uD paralel cu OF, deci:

$$\frac{OF}{uD} = \frac{OE}{uE} \text{ sau } \frac{OF}{uD} = \frac{OE}{OE-Ou} \quad \ldots \langle\gamma\rangle$$

Din relaţiunea $\langle\beta\rangle$ deducem: $OK\langle OH-Ou\rangle = uD.\ OH.$

Din relaţiunea $\langle\gamma\rangle$ deducem: $OF\langle OE-Ou\rangle = uD\cdot OE.$

Făcând înmulţirele avem:

$$OK.OH - OK.Ou = uD.OH \quad \ldots \langle\delta\rangle$$

şi

$$OF.OE - OF.Ou = uD.OE \quad \ldots \langle\varepsilon\rangle$$

Pentru a avea valorile lui Ou şi uD, înmulţim $\langle\delta\rangle$ cu OE şi $\langle\varepsilon\rangle$ cu OH şi avem:

$$OK.OH.OE - OK.Ou.OE = uD.OH.OE.$$
$$OF.OE.OH - OF.Ou.OH = uD.OH.OE.$$

De unde, egalând membrii întâi, deducem:

$$OK.OH.OE - OK.Ou.OE = OF.OE.OH - OF.Ou.OH.$$

de unde:

$$Ou = \frac{OF.OE.OH. - OK.OH.OE}{OF.OH - OK.OE.}$$

sau:

$$Ou = OE.OH.\frac{OF-OK}{OF.OH-OK.OE}$$

Înlocuind valorile lui OE şi OF, scoase din $\langle\alpha\rangle$ avem:

$$Ou = OH.OH'\frac{OL}{OL'}\cdot\frac{OK'\frac{OL}{OL'} - OK}{OK'.\frac{OL}{OL'}\cdot OH - OK.OH'.\frac{OL}{OL'}}$$

Făcând calculele şi reducerele necesare, ne vine:

$$Ou = \frac{OH.OH'.OK'\ OL - OH.OH'.OK.OL'}{OL'OK'OH - OL'.OK.OH'.}$$

Înmulţind membrul al doilea cu:

$$\frac{OL'OK'.OH - OL'.OK.OH'.}{OH.OH'OK - OK'OL.OL'}$$

Şi făcând reducerele necesare, rezultă:

$$Ou = \frac{'}{OK.OL'} - \frac{1}{OK'.OL'}$$

Vom proceda în acelaş mod pentru a găsi valorile celorlalţi parametri, şi vom găsi:

$$uD = \frac{1}{OH.OL'} - \frac{1}{OH'.OL}$$

şi:

$$OL = \frac{1}{OH.OK'} - \frac{1}{OH'.OK}$$

Pentru a transforma parametrii în indici vom pune:

$$OH = \frac{a}{q}, \quad OK = \frac{b}{r}, \quad OL = \frac{c}{s}$$

$$OH' = \frac{a}{q'}, \quad OK' = \frac{b}{r'}, \quad OL' = \frac{c}{s'},$$

q, r, s, şi q' r', s' fiind indicii feţelor în zonă, iar a, b, c parametrii planului fundamental.

Dacă punem: $a = b = c = 1$, ne rezultă:

$$OH = \frac{1}{q}, \quad OK = \frac{1}{r}, \quad OL = \frac{1}{s}$$

$$OH' = \frac{1}{q'}, \quad OK' = \frac{1}{r'}, \quad OL' = \frac{1}{s'},$$

Inlocuind aceste valori în ecvaţiile precedente avem:

$$Ou = \frac{1}{\frac{1}{r}.\frac{1}{s'}} - \frac{1}{\frac{1}{r'}.\frac{1}{s}} = rs' - r's.$$

$$uD = \frac{1}{\frac{1}{q}.\frac{1}{s'}} - \frac{1}{\frac{1}{q'}.\frac{1}{s}} = qs' - q's = q's - qs'.$$

$$OL = \frac{1}{\frac{1}{q}.\frac{1}{r'}} - \frac{1}{\frac{1}{q'}.\frac{1}{r}} = qr' - q'r.$$

Şi dacă însemnăm valorile indicilor axei de zonă:

$$Ou = u, \quad uD = v, \quad OL = w.$$

vom ave în definitiv:

$$\left.\begin{aligned} u &= rs' - r's. \\ v &= q's - qs' \\ w &= qr' - q'r. \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Aceste ecvaţii reprezintă relaţiile ce există între indicii axei de zonă şi indicii feţelor ce formează zona. Aceste formule fiind foarte întrebuinţate, s'a căutat o regulă mnemonică pentru a le găsi uşor. Pentru aceasta se scrie de două ori de a rândul indicii celor două feţe pe două linii, unii deasupra celorlalţi, se separă prin linii verticale indicii extremi şi se înmulţesc în cruce

doi câte doi indicii rămaşi, scăzând productele de ordin păreche din productele de ordin nepăreche, ţinând samă de semnul indicelui. Vom ave astfeliu:

$$\begin{array}{c|c} q & r \\ q' & r' \end{array} \times \begin{array}{c} s \\ s' \end{array} \times \begin{array}{c} q \\ q' \end{array} \times \begin{array}{c|c} r & s \\ r' & s' \end{array}$$

$$u = rs' - r's, \quad v = q's - s'q, \quad w = qr' - q'r.$$

Să căutăm a stabili acum ecvaţia dreptei de intersecţie a celor două feţe.

Se ştie că, ecvaţia unui plan ce trece prin origină este

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = o$$

Dacă considerăm feţele precedente, qrs şi q'r's' trecând prin origină, ecvaţiile lor vor fi:

$$\left.\begin{array}{l} q\dfrac{x}{a} + r\dfrac{y}{b} + s\dfrac{z}{c} = o \\ q'\dfrac{x}{a} + r'\dfrac{y}{b} + s'\dfrac{z}{c} = o \end{array}\right\} \langle \alpha \rangle$$

Pentru a găsi intersecţia lor este de ajuns a considera simultan aceste două ecvaţii şi vom avea:

$$q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = q'\frac{x}{a} + r'\frac{y}{b} + s'\frac{z}{c} = o \ldots \langle b \rangle$$

Divizând primul membru al acestei ecvaţii prin q, şi al doilea prin q', avem:

$$\frac{x}{a} + \frac{r}{bq}y + \frac{s}{cq}z = \frac{x}{a} + \frac{r'}{bq'}y + \frac{s'}{cq'}z.$$

sau:

$$cq'ry + bq'sz = cqr'y + bqs'z$$

sau:

$$\frac{y}{b\langle qs' - q's\rangle} = \frac{z}{c\langle q'r - qr'\rangle} \ldots \langle c \rangle$$

Divizând primul membru al ecvaţiei ⟨b⟩ prin r şi al doilea prin r', vom avea:

$$\frac{x}{a\langle rs' - r's\rangle} = \frac{z}{c\langle rq' - r'q\rangle} \ldots \langle d \rangle$$

Considerând simultan ecvaţiile ⟨c⟩ şi ⟨d⟩ avem:

$$\frac{x}{a\langle rs' - r's\rangle} = \frac{y}{b\langle qs' - q's\rangle} = \frac{z}{c\langle rq' - r'q\rangle} \ldots \langle e \rangle$$

Inlocuind cantităţile între parantez, prin valorile lor, care sunt indicii axei de zonă, avem:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{x}{au} = \frac{y}{bv} = \frac{z}{cw} \quad \ldots \quad (f)$$

Aceasta este: *ecvaţia axei de zonă.*

— —

Să determinăm acuma *condiţiunea pentru ca o faţă Q (efg) să poată face parte din zona formată de feţele P (hkl) şi P' (h'k'l').* Putem ajunge la rezultat prin două metode:

I. Pentru ca faţa Q să poată face parte din zona feţelor P şi P', trebue ca, intersecţia feţelor P şi P' să fie paralelă cu intersecţia feţelor P' şi Q, şi atunci, aceste două intersecţii transportate paralel cu ele însuşi până ce trec prin origină, trebue să coincidă. Deci trebue să căutăm relaţiunele care trebue să existe între indicii feţelor P, P' şi Q pentru ca intersecţiile acestor feţe să se suprapună la trecerea lor prin origină.

Să considerăm feţele HKL şi H'K'L' a căror intersecţie este $\beta\gamma$; (Fig. 34) să transportăm paralel cu ea însuşi faţa H'K'L' până în ELF, când intersecţia LD cu faţa HKL, atinge axa Oz. Însă am văzut mai înainte că această schimbare consistă în a înmulţi parametrii feţei H'K'L' cu o cantitate fixă $\frac{OL}{OL'}$. Pe componentele intersecţiei LD care sunt: Ou, Ov şi Og (Og = OL) să construim un paralelipiped. Diagonala OW' a acestui paralelipiped, care este paralelă şi egală cu LD, trece prin origină. Dacă am construi un paralelipiped pe intersecţia $\beta\gamma$ sau pe componentele sale, va trebui ca diagonala acestui paralelipiped să fie paralelă cu LD, şi, pentru ca ea să treacă prin origină şi să se suprapună lui Ow, va trebui să înmulţim dimensiunile paralelipipedului construit pe $\beta\gamma$, cu o constantă $\left(\frac{OL}{OL'}\right)$.

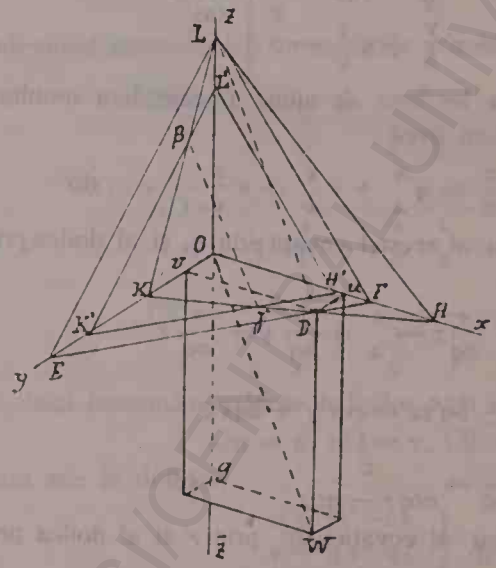


Fig. 34

Să procedăm acum la demonstrarea relaţiunei noastre. Să

determinăm mai întâi axa de zonă a feţelor P şi P'. Vom avea :

$$\begin{array}{c|c|c} h & k \times l & h \times k & l \\ h' & k' \times l' & h' \times k' & l' \end{array}$$

$$kl'-k'l,\ lh'-l'h,\ hk'-h'k.$$

Pentru feţele P' şi Q avem :

$$\begin{array}{c|c|c} h' & k' \times l' & h' \times k' & l' \\ e & f \times g & e \times f & g \end{array}$$

$$k'g-fl',\ l'e-gh',\ h'f-ek'$$

Insă, după observaţia precedentă, trebue ca, indicii primei axe de zonă să fie egali cu indicii celei a doua axă de zonă, înmulţiţi cu o constantă. Deci :

$$kl'-k'l = c\,(k'g-fl') \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$lh'-l'h = c\,(l'e-gh') \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$hk'-h'k = c\,(h'f-ek') \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Să înmulţim ecvaţia (1) cu e, ecvaţia (2) cu f şi ecvaţia (3) cu g ; vom ave :

$$e\,(kl'-k'l) = ce\,(k'g-fl')$$
$$f\,(lh'-l'h) = cf\,(l'e-gh')$$
$$g\,(hk'-h'k) = cg\,(h'f-ek')$$

Dacă adunăm aceste egalităţi va rezulta :

$$e\,(kl'-k'l) + f\,(lh'-l'h) + g\,(hk'-h'k) = ce\,(k'g-fl') + cf\,(l'e-gh') + cg\,(h'f-ek')$$

Făcând operaţiunele în al doilea membru, vom găsi că el se reduce la zero. Vom ave dar :

$$e\,(kl'-k'l) + f\,(lh'-l'h) + g\,(hk'-h'k) = o.$$

Punând : $(kl'-k'l) = u$, $lh'-l'h = v$, $hk'-h'k = w$

vom ave : $$eu + fv + gw = o \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Relaţiune care se exprimă astfeliu :

Suma productelor respective a indicilor axei de zonă cu indicii feţei, care face parte din zonă, trebue să fie egală cu zero.

Această ecvaţiune se numeşte : *ecvaţia zonelor.*

II. Să considerăm un cristal pe care se găsesc feţele care ne interesează, dispuse astfeliu ca origina axelor să coincidă cu centrul cristalului. Din centrul C al cristalului, cu o rază oare care, să descriem o sferă, să scoborăm apoi perpendiculare pe feţele în zonă, şi să le prelungim până ce ele întâlnesc sfera în punctele P, Q, P', care sunt polii feţelor şi se găsesc pe acelaş

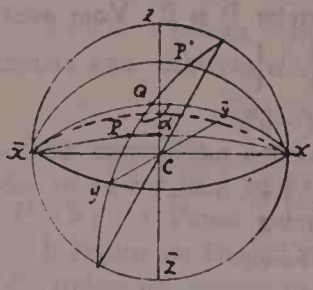


Fig. 35

cerc mare. (Fig. 35). Prin polii, P, Q, P' şi extremitatea axei x să facem să treacă arcuri de cerc mare, care formează astfeliu două triunghiuri sferice : PXQ şi P'XQ. Insemnând cu α unghiul PQX, aceste două triunghiuri ne dau relaţiunele :

$$\cos PX = \cos PQ \cos QX + \sin PQ \sin QX \cos \alpha.$$

$$\cos P'X = \cos P'Q \cos QX - \sin P'Q \sin QX \cos \alpha.$$

Pentru a elimina *cos* α., să înmulţim prima ecvaţie cu : sin P'Q şi a doua cu sin PQ, şi să le adunăm. Vom ave :

$$\sin P'Q \cos PX + \sin PQ \cos P'X = \sin P'Q \cos PQ \cos QX + \sin PQ \cos P'Q \cos QX.$$

sau : $\sin P'Q \cos PX + \sin PQ \cos P'X = \cos QX [\sin P'Q \cos PQ + \sin PQ \cos P'Q]$

şi fiind că, cantitatea între parantez este :

$$\sin (P'Q + PQ) = \sin PP'$$

avem : $\sin P'Q \cos PX + \sin PQ \cos P'X = \sin PP' \cos QX \ldots (\alpha)$

Unind succesiv prin arcuri de cerc mare, polii P, Q, P' cu extremitatea axei Y şi apoi a axei Ξ, vom obţine relaţiunile :

$$\sin P'Q \cos PY + \sin PQ \cos P'Y = \sin PP' \cos QY \ldots (\beta)$$

şi $\sin P'Q \cos P\Xi + \sin PQ \cos P'\Xi = \sin PP' \cos Q\Xi \ldots (\gamma)$

Să scoatem din (α) şi (β) valorile lui : sin P'Q şi sinPQ şi să le înlocuim în ecvaţia (γ) : vom ave :

$$\cos P\Xi \langle \cos PX \cos QY - \cos QX \cos P'Y \rangle + \cos P'\Xi \langle \cos QX \cos PY - \cos QY \cos PX \rangle + \cos Q\Xi \langle \cos P'Y \cos PX - \cos PY \cos P'X \rangle = 0.$$

De unde vom scoate :

$$\cos QX \langle \cos PY \cos P'\Xi - \cos P'Y \cos P\Xi \rangle + \cos QY \langle \cos P'Y \cos P\Xi - \cos PX \cos P'\Xi \rangle + \cos Q\Xi \langle \cos P'Y \cos PX - \cos PY \cos P'X \rangle = 0. \ldots (\delta).$$

Dacă însemnăm cu : *a*, *b*, *c* lungimele axelor, feţele fiind caracterizate prin aceiaşi indici ca şi mai înainte, vom putea scrie pentru ecvaţiile acestor feţe :

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos P\Xi.$$

$$\frac{a}{e}\cos QX = \frac{b}{f}\cos QY = \frac{c}{g}\cos Q\Xi.$$

şi $$\frac{a}{h'}\cos P'X = \frac{b}{k'}\cos P'Y = \frac{c}{l'}\cos P'\Xi.$$

Din întâia şi a treia din aceste relaţiuni putem scoate valorile productelor: cosPY cosP'Ξ . . . . de care avem nevoe în ecvaţia ⟨δ⟩. Inlocuind aceste valori şi făcând reducerile ne vine:

$$\cos QX\,\langle kl' - k'l\rangle\, a + \cos QY\,\langle lh' - l'h\rangle\, b + \cos Q\Xi\,\langle k'h - kh'\rangle\, c = o.$$

Insă cantităţile între parantez reprezintă tocmai indicii axei de zonă a feţelor P şi P':

$$\begin{array}{cc|cc|cc} h & k & l & h & k & l \\ h' & k' & l' & h' & k' & l' \end{array}$$

$$u = kl' - k'l,\quad v = lh' - l'h,\quad w = hk' - h'k.$$

Inlocuindu-le în ecvaţia de mai sus, obţinem:

$$ua\cos QX + vb\cos QY + wc\cos Q\Xi = o \ldots \langle\varepsilon\rangle.$$

Insă relaţiunea: $\frac{a}{e}\cos QX = \frac{b}{f}\cos QY = \frac{c}{g}\cos Q\Xi$ ne dă:

$$\cos QX = \frac{ec}{ag}\cos Q\Xi \text{ şi } \cos QY = \frac{fc}{bg}\cos Q\Xi.$$

Inlocuindu-le în ecvaţia ⟨ε⟩ după ce vom face reducerile, vom obţine:

$$eu + fv + gw = o \ldots . \langle\zeta\rangle$$

care este ecvaţia zonelor.

Ne rămâne încă de stabilit: *Condiţiunea ce trebue să îndeplinească o faţă, pentru ca să poată face parte din două zone, determinate de alte feţe.* Fie faţa ⟨qrs⟩, şi două axe de zonă: uvw şi u'v'w'. Relaţiunile ce exprimă că faţa ⟨qrs⟩ face parte din zona uvw şi din zona u'v'w' sunt:

$$qu + rv + sw = o \ldots . \langle 1\rangle$$
$$qu' + rv' + sw' = o \ldots . \langle 2\rangle$$

Să determinăm valorile lui q, r, şi s, după condiţiunile exprimate prin relaţiunele ⟨1⟩ şi ⟨2⟩.

Pentru a elimina pe *r* înmulţim ⟨1⟩ cu *v'* şi ⟨2⟩ cu *v* şi avem:

$$v'qu + v'rv + v'sw = o.$$
$$vqu' + vrv' + vsw' = o.$$

Scăzind a doua din întâia avem:

$$v'qu - vqu' + v'sw - vsw' = o$$

sau: $$q\langle v'u - vu'\rangle = s\langle vw' - v'w\rangle$$

De unde: $$q = \frac{s(vw' - v'w)}{v'u - vu'} \quad \ldots$$

sau: $$q = s\frac{vw' - v'w}{v'u - vu'} \quad \ldots \langle 3\rangle$$

Eliminând pe q în ecvaţiile ⟨1⟩ şi ⟨2⟩ avem:

$$r = s\frac{uw' - u'w}{u'v - uv'} = s\frac{u'w - uw'}{uv' - u'v} \quad \ldots \langle 4\rangle$$

Insă, fiind că avem numai două ecvaţii pentru trei necunoscute, sistemul este nedeterminat; deci orice valoare vom da lui *s* va satisface sistemul ecvaţiilor ⟨1⟩ şi ⟨2⟩. Să punem dar:

$$s = s\frac{uv' - u'v}{uv' - u'v} \quad \ldots \langle 5\rangle$$

Insă noi putem înmulţi indicii unei feţe cu o cantitate constantă, fără ca valoarea cristalografică a feţei să se schimbe: să le înmulţim cu $\frac{v'u - vu'}{s}$. Vom avea:

$$q = vw' - v'w \quad \ldots \langle 6\rangle$$
$$r = u'w - uw' \quad \ldots \langle 7\rangle$$
$$s = uv' - u'v \quad \ldots \langle 7'\rangle$$

Aceste relaţii ne indică valorile indicilor feţei în funcţiune de indicii axelor de zonă, din care faţa trebue să facă parte. Pentru a stabili mai uşor aceste formule, să întrebuinţăm metoda mnemonică ca şi pentru legea zonelor:

$$\begin{array}{cc|cc|cc} u & v & w & u & v & w \\ u' & v' & w' & u' & v' & w' \end{array}$$

$$q = vw' - v'w,\ r = u'w - uw',\ s = uv' - u'v.$$

IV.

Sistemele de reprezentare grafică a formelor cristaline

Pentru a putea studia formele cristaline, nu e de ajuns a şti să dăm o notaţiune feţelor acelor forme; trebue să ştim încă a le reprezenta, aşa ca ele să ne poată servi, fie pentru a ne face o idee de forma generală a cristalului, fie pentru a ne ajuta în calculele cristalografice. Putem ajunge la aceste rezultate pe cale de perspectivă.

In primul caz, ne servim de *Perspectiva cavalieră*, care consistă în a projecta cristalul pe un plan paralel cu două din muchiile cristalului şi care este de ordinar planul tabloului; pentru

aceasta ne închipuim cristalul transportat la o oare care distanță și ducem liniile ce reprezintă muchile, așa ca să putem face să se vadă cât mai multe fețe posibile, fără a sacrifica pentru aceasta forma admisă în general pentru cristal. In unele cazuri este comod de a projecta cristalul pe una din fețele sale, prin normale la planul acestei fețe: aceasta este: *Projecția ortogonală.*

Insă pentru a putea face calculele cristalografice avem nevoe de a reprezenta formele cristaline, cât se poate mai exact, și ajungem la acest rezultat prin *perspectiva sferică.*

Sunt două feluri de perspective sferice: *projecția gnomonică* și *projecția stereografică.*

Projecția gnomonică. In projecția gnomonică se consideră cristalul în interiorul unei sfere, așa ca centrul cristalului să coincidă cu centrul sferei, iar axa principală a cristalului să se confunde cu diametrul vertical al sferei. Ca *plan de projecțiune* se ia planul orizontal tangent sferei la extremitatea axei verticale, iar *punctul de vedere* se consideră în centrul sferei. (Fig. 36). Dacă voim a projecta o față d. ex. *abcd*, pe planul MN, vom uni punctul de vedere cu centrul feței *p*, și vom prelungi dreapta *Op*, până la întâlnirea planului MN în punctul P, care reprezintă projecția gnomonică a feței *abcd*.

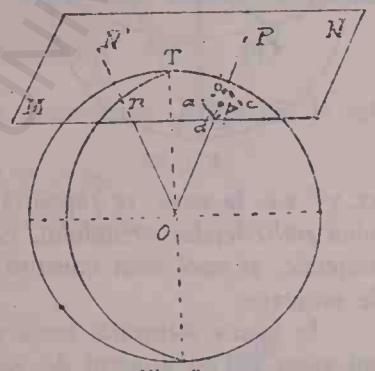


Fig. 36

In acest sistem de projecție avem un singur avantaj: projecția cercurilor mari este reprezentată prin linii drepte. Ca desavantaje avem: 1) cercurile mici se projectează după elipse și atunci rezolvirea triunghiurilor sferice este foarte grea și 2) că punctele situate aproape de planul orizontal ce trece prin centru, adică aproape de baza hemisferei superioare, se projectează la infinit.

Mallard, în tratatul său de Cristalografie a făcut un alt uz de projecția gnomonică: el a înlocuit fețele prin o rețea polară a rețelei primitive a cristalului.

Projecțiunea stereografică, imaginată de *Neumann*, a fost întrebuințată de *Miller* și în timpurile noastre este cea mai căutată. O vom studia dar cu toate detailele.

Să considerăm planul P și punctul A în fața acestui plan.

Dacă în V, de cealaltă parte a planului, se găseşte ochiul observatorului, care se numeşte *Punct de vedere*. şi dacă unim pe V cu A prin o dreaptă, care întâlneşte planul P în punctul *A'*, acest punct se numeşte *Perspectiva* lui A pe planul P, căruia se dă numele de: *plan de Proiecţie*. (Fig. 37). Pentru a avea perspectiva unei figuri, este de ajuns de a determina perspectivele unui mare număr de puncte de ale figurei şi a le uni prin linii continue.

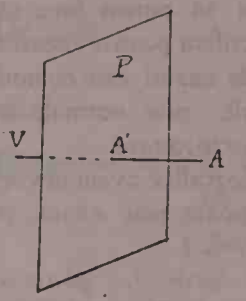


Fig. 37

In perspectiva stereografică, se consideră cristalul înscris într'o sferă numită: *sfera de proiecţie*. (Fig. 38). Ca plan de proiecţie se ia planul cercului mare orizontal PP' ce trece prin centrul O al sferei, iar punctul de vedere V se află la extremitatea inferioară a diametrului NV perpendicular pe planul de proiecţie. Cristalul, a cărui feţe voim a proiecta, este aşezat aşa ca centrul său să coincidă cu centrul O al sferei, care este în acelaş timp origina axelor de coordonate xx', yy', zz', la care se rapoartă cristalul. Mai întâi vom determina *polii* feţelor cristalului, care se află deasupra planului de proiecţie, şi apoi vom construi perspectiva acestor poli pe planul de proiecţie.

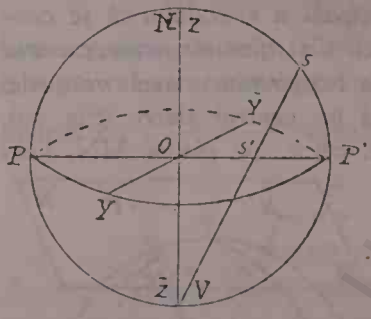


Fig. 38

In figura alăturată, proiecţia polului S se va afla dacă vom uni acest pol cu punctul de vedre V; punctul S' unde dreapta SV întâlneşte planul de proiecţie este perspectiva, sau proiecţia polului S.

— Inainte de a vedea în ce mod se pot reprezenta în perspectiva stereografică diversele elemente geometrice de care avem a ne servi, să stabilim oare care probleme fundamentale, pe care se bazează proiecţia stereografică.

I. *Proiecţia unui cerc de pe sferă este un cerc.* Pentru a demonstra această proprietate, ne bazăm pe o teoremă din Geometrie, care se enunţă aşa:

Secţiunea antiparalelă a unui con oblic cu baza circu-

lară, este un cerc. Fie SAB planul principal a unui con oblic, a cărui bază circulară este AB, şi, fie A'B' secţiunea antiparalelă, determinată de intersecţia cu o sferă aşa că avem: $\angle SB'A' = SAB$. ⟨Fig. 39⟩. Să demonstrăm ca această secţiune este circulară. Să considerăm un punct M pe circonferenţa acestei secţiuni şi prin cest punct să deducem un plan paralel cu baza, ceia ce ne dă secţiunea circulară CD, a căreia intersecţie cu A'B' este dreapta MPP'. Dacă considerăm pe MP în planul secţiunei circulare CD, avem relaţia:

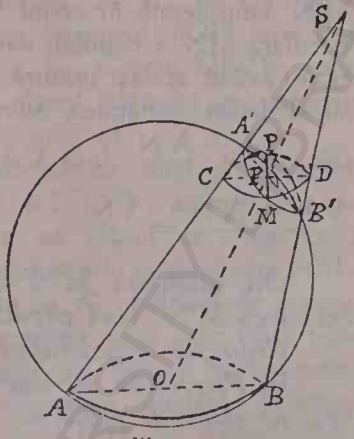


Fig. 39

$$\overline{MP}^2 = PC \times PD \quad \ldots\ldots \langle 1 \rangle$$

Insă tiunghiurile A'PC şi B'PD sunt asemeni şi ne dau

$$\frac{A'P}{PC} = \frac{PD}{PB'} \text{ de unde: } A'P \times PB' = PC \times PD$$

Inlocuind această valoare a productului $PC \times PD$ în relaţiunea (1) vom avea:

$$\overline{MP}^2 = A'P \times PB'$$

Deci: *secţiunea A'B' este circulară.*

— —

Să demonstrăm acuma proprietatea anunţată. Să considerăm pe sfera de projecţie cercul MN, pe care voim a'l projecta ⟨Fig. 40⟩. Dacă V este punctul de vedere, şi I centrul cercului MN, planul tabloului trecând prin punctele V şi I, va fi planul principal al conului VMN, format de dreptele ce servesc a projecta punctele M şi N, şi va da cu planul cercului MN intersecţia MIN, care este un diametru al cercului. Perspectivele punctelor M şi N pe planul de projecţie vor fi punctele M' şi N', aşezate pe diametrul AA' al

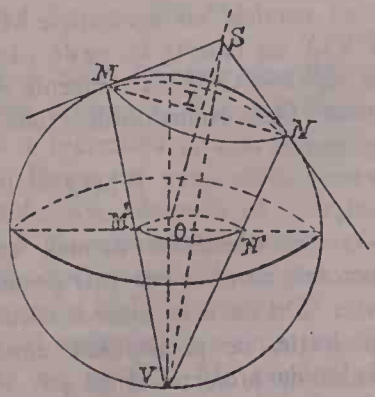


Fig. 40

cercului de proiecție, care este perpendicular pe OV. Secțiunea M'N' considerată în conul VMN este antiparalelă față cu baza circulară MN a conului, căci unghiurile VMN și M'N'V sunt egale, având aceiași măsură: cel întâi jumătatea arcului VA'N, iar al doilea jumătatea sumei arcurilor cuprinse între laturile sale: $\frac{VA + A'N}{2}$. Însă VA = VA' deci avem ca măsură:

$$\frac{VA' + A'N}{2} = \frac{VN}{2}.$$

Ori, secțiunea M'N' este proiecția cercului MN; deci: Secțiunea M'N' fiind circulară, urmează că:

Proiecția stereografică a unui cerc este un cerc.

II. *Proiecțiile stereografice a două curbe, care se întâlnesc pe sfera de proiecție, se taie după același unghiu ca și curbele.* Fie M punctul de intersecție a două curbe pe sfera de proiecție și MP și MQ, tangentele la aceste două curbe în punctul M (Fig. 41). Proiecțiile lor sunt M'P și M'Q, care întâlnesc tangentele în P și Q. Planul tangent la sferă în punctul V, este atins de prelungirile tangentelor în P' și Q' și fiindcă planul tangent în V este paralel cu planul de proiecțiune, dreptele VP' și VQ' sunt paralele cu proiecțiile M'P și M'Q. Triunghiurile P'MQ' și P'VQ' au laturile lor egale, căci: P'Q' e comun apoi P'M = P'V și Q'M = Q'V ca tangente duse din același punct exterior la sferă. Deci triunghiurile sunt egale și au unghiurile lor egale: și atunci:

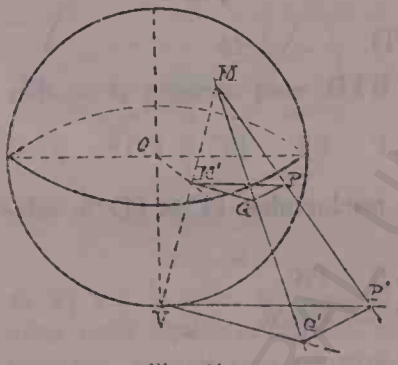


Fig. 41

$$P'MQ' = P'VQ' = PM'Q.$$

— —

Să examinăm acuma, cum se obține proiecția diverselor cercuri, care se pot găsi pe sferă.

Ori ce cerc mare a cărui plan e perpendicular pe planul de proiecție, se proiectează după diametrul corespunzător al cercului de proiecție (Fig. 42). Așa, cercul NPVP' se proiectează după diametrul POP', cercul NTVT' după diametrul TOT'. În adevăr, cercul NPVP' întâlnind cercul de proiecție în P și P',

aceste punte vor fi propriile lor proiecţii; toate punctele intermediare între P şi P' de pe cerc, precum: A, B... se vor proiecta pe diametrul POP' între P şi P' în a, b,.. Cercul NPVP', care este în planul tabloului se numeşte *cerc de origină.*

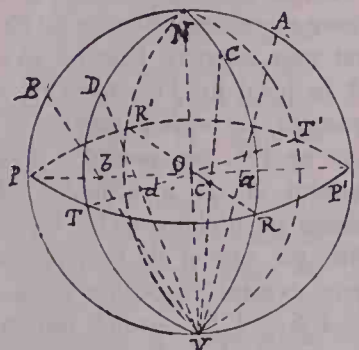


Fig. 42

Observăm că unghiul planurilor NPVP' şi NTVT', ambele perpendiculare pe planul de proiecţiune, este măsurat prin unghiul plan POT. Aceasta ne dă mijlocul de a construi proiecţia unui cerc mare perpendicular pe planul de proiecţie, când cunoaştem unghiul ce acest cerc face cu planul cercului de origină ⟨Fig. 43⟩. Dacă presupunem că unghiul POT = 35°, luăm cercul de proiecţie, ducem diametrele PP' şi NV' perpendiculare între ele, cel întâi fiind proiecţia cercului de origină; plecând din P spre V, luăm cercul PT = 35° şi ducem diametrul TOT', care va reprezenta proiecţia cercului mare: NTVT'.

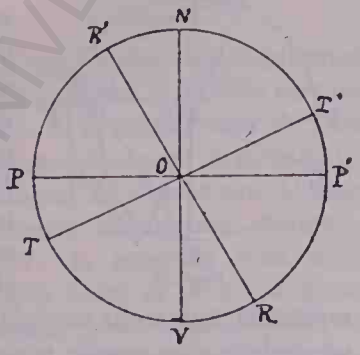


Fig. 43

— —

Să determinăm acum *proiecţia unui cerc mare, care, nefiind perpendicular pe planul de proiecţie este normal planului cercului de origină.*

Fie de proiectat cercul RMS, a cărui diametru este RS şi intersecţia cu planul de proiecţie este dreapta *rs* ⟨Fig. 44⟩. Punctele *r* şi *s* reprezintă propria lor proiecţiune. Pentru a avea proiecţiunea semicercului rSs, observăm că: porţiunea OS a diametrului reprezintă intersecţia planului cercului de origină cu planul cercului RMS şi fiindcă O este propria sa proiecţie, proiecţia lui S trebue să fie pe OP'. Ne rămâne să găsim proiecţia punctului S. Pentru aceasta e deajuns să-i determinăm perspectiva, unind punctul S

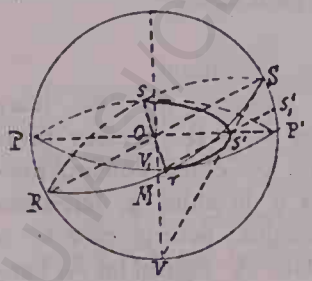


Fig. 44

cu punctul de vedere V, ceia ce ne dă intersecţia S' cu OP'. Deci proiecţia lui OS va fi OS'. Având cele trei puncte : r, S' şi s, ducem prin ele un cerc rS's, care reprezintă proiecţia lui rSs.

Putem ajunge la acelaş rezultat prin rabateri. Făcând să se întoarcă planul cercului de origină în jurul lui PP', până ce se suprapune pe planul de proiecţie, punctul de vedere vine în V', extremitatea diametrului perpendicular pe PP', iar puntul S cade în S_1. In timpul acestei rotaţii puntul S' nu a schimbat de poziţie, aşa că S_1 trebue să se găsească pe prelungirea lui $V_1'S'$; şi fiind că planul cercului RMS face cu cercul de proiecţie un unghiu măsurat prin arcul SP', este evident că poziţia nouă a lui S în S_1 va fi aşa ca să avem : $P'S = P'S_1$. Atunci punctul S' având o poziţie determinată pe cercul de proiecţie. este de ajuns a-l uni cu punctul de vedere V', şi punctul S' întâlnirea razei $V_1'S_1$ cu OP', va fi proiecţia lui S. (Fig. 45).

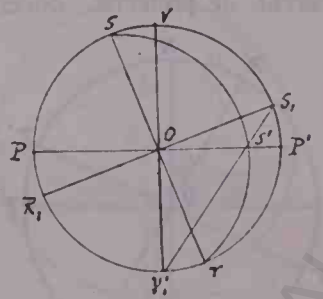


Fig 45

Aceasta ne dă mijlocul de a construi proiecţia unui cerc normal pe planul de origină şi făcând cu planul de proiecţie un unghiu dat. In adevăr : să considerăm cercul de proiecţie şi cei doi diametri perpendiculari : PP' şi $V'V_1'$. Plecând din P' luăm spre V', un arc $P'S_1 = P'S$, ceia ce ne dă punctul S_1 ; ducem diametrul S_1OR_1 şi diametrul perpendicular rOs, care reprezintă intersecţia cercului RMS cu planul de proiecţie : deci punctele *r* şi *s* aparţin proiecţiei cercului RMS. Ne trebue încă proiecţia punctului S, pe care o putem obţine uşor, unind pe S_1 cu punctul de vedere V_1', ceia ce ne dă cu OP' intersecţia S', care este proiecţia lui S. Prin r, S' şi s, facem să treacă un cerc mare, rs's, care reprezintă proiecţia lui RMS.

Ne rămâne acuma de făcut câteva aplicaţiuni.

1). Să considerăm pe sfera de proiecţie un cerc mare MAC'M'D'B, trecând prin două puncte A şi B, a căror perspective *a* şi *b* sunt cunoscute (Fig. 46). Se cere a construi proiecţia acestui cerc mare. Pentru aceasta e de ajuns a determina perspectiva unui al treilea punct al cercului, pentru care se ia de ordinar opusul unuia din punctele date A' opusul lui A. Pentru a găsi acest punct este de ajuns a uni pe A cu O şi a pre-

lungi dreapta AO până la întâlnirea în A' cu cercul NACVD. Unind V cu A' prelungim această dreaptă până la întâlnirea în a' cu prelungirea lui CO, ceia ce ne dă în a' perspectiva lui A': ea se află în afară de sfera de proiecție, însă în planul de proiecție. Prin a, b, și a', facem să treacă un cerc mare, care reprezintă proiecția cercului mare ce trece prin A și B.

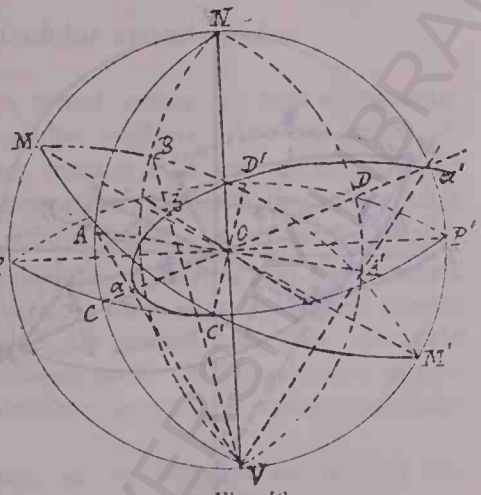


Fig. 46

Pentru a construi această proiecție procedăm așa: (Fig. 47) Fie a și b perspectivele date; pentru a găsi perspectiva lui A', unim a cu O și prelungim dreapta până la întâlnirea în C și D cu circonferența cercului de proiecție: ea reprezintă proiecția cercului NACVD care trece prin A și opusul său A'. Dacă rabatem acel cerc în jurul lui CD, punctul de vedere vine la extremitatea diametrului normal pe CD: în proiecție vine în V. Dacă unim pe V cu a și prelungim dreapta până în A', acest punct reprezintă rabaterea lui A. Unind A' cu O și prelungind această dreaptă, obținem cu circonferința cercului de proiecție intersecția A', care este rabaterea lui A' opusului lui A. Pentru a ave perspectiva acestui punct este de ajuns de a-l uni cu punctul de vedere V și a prelungi dreapta VA', până la întâlnirea sa cu dreapta COD prelungită, în punctul a'_1. Prin punctele, a, b și a'_1 facem să treacă un cerc mare, care determină punctele C' și D' pe circonferența cercului de proiecție, puncte diametral opuse. Cercul C'abD' reprezintă proiecția cercului mare ce trece prin A și B.

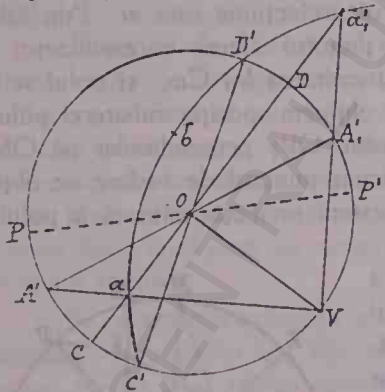


Fig. 47

II) S'a arătat că: dacă mai multe fețe sunt în zonă, polii acestor fețe sunt situați pe același cerc mare, numit *cerc de zonă*.

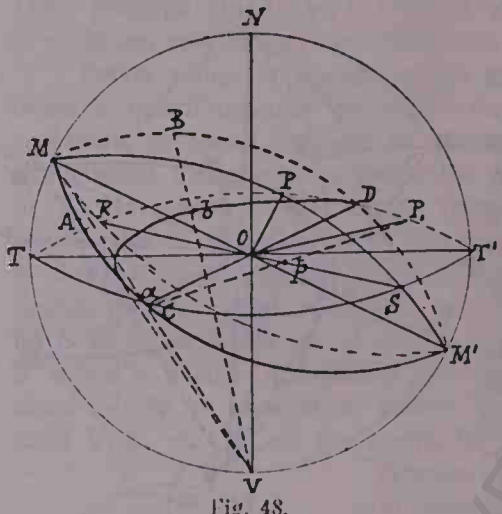


Fig. 48.

Fiind dat proiecțiunea unui cerc mare de zonă să determinăm proiecția polului său; adică a punctului în care, axa de zonă corespunzătoare acestui cerc atinge sfera (fig. 48). Fie CmD proiecția cercului de zonă MCM'D, și COD diametrul acestei proecții. Diametrul ROS perpendicular pe COD reprezintă proiecția cercului mare MRM'S normal pe cercul proiectat după CmD. Deci pe diametrul RS se va găsi proiecția polului. Într-adevăr: pe sferă polul P trebue să se găsească la 90^0 de distanță de la punctul a cărui proiecțiune este *m*. Prin rabaterea lui RMS în jurul lui RS, punctul sferei corespunzetor lui *m*, se va rabate în M' la extremitatea lui Cm, și polul se va rabate la 90^0 de M_1 în P_1; obținem poziția rabaterei polului dacă unim M_1 cu O și ridicăm OP_1 perpendicular pe OM_1. Unind P_1 cu C unde se află acum punctul de vedere, se obține cu ROS, intersecția *p*, care reprezintă proiecția căutată a polului. (Fig. 49).

De aici deducem mijlocul de a găsi adevărata valoare a unui arc, a cărui proiecție este dată. Așa: fiind dat arcul *ab* în proiecție, pentru a găsi adevărata lui valoare, determinăm mai întâi proiecția *p* a polului cercului CambD, apoi unim această proiecție cu *a* și *b* și prelungim dreptele până la întâlnirea în A și B cu circonferența cercului de proiecție. Arcul ARM_1B reprezintă adevărata mărime a arcului a cărui proiecție este *ab*.

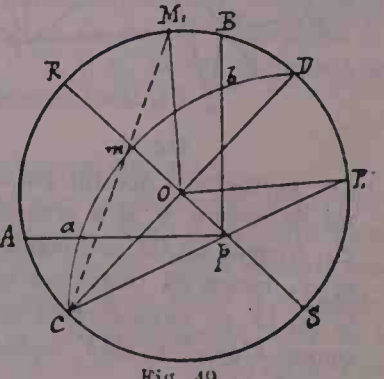


Fig. 49

V

Principiele calculelor cristalografice

Când voim a studia un cristal, trebue mai întâi să măsurăm pe acest cristal, cât mai multe unghiuri. Apoi se deduc: 1°. Cărui sistem cristalin aparţine cristalul 2°. Care sunt dimensiunile formei primitive, adică lungimea axelor, din care una este luată egală cu 1 şi 3°. Care este notaţia feţelor ce prezintă cristalul.

Pentru aceasta trebue mai întâi să alegem, prin considerarea valorii unghiurilor şi poziţia feţelor, care sunt feţele care aparţin formei primitive. Iar ca mijloc de control vom face operaţiele inverse, adică: considerând dimensiunele formei primitive şi notaţia feţelor cunoscute, să deducem prin calcul valoarea unghiurilor feţelor.

Trebue dar în primul loc, să ne ocupăm de măsura unghiurilor. Trebue să luăm toate precauţiunele necesare pentru a evita două cauze principale de erori, datorite: una mişcărei ochiului în timpul măsurei şi alta: lipsei de centrare a cristalului.

— După ce s'a obţinut cel mai mare număr de măsuri de unghiuri, vom face desemnul cristalului notând feţele cu litere sau cu cifre; vom face să apară, pe cât posibil, care sunt feţele în zonă, câte zone sunt şi ce relaţiuni există între ele şi dacă ele sunt dreptunghiulare sau înclinate. Se pot deosebi mai multe cazuri:

1) Unghiurile măsurate nu sunt egale în nici o zonă, ceia ce arată lipsa unui plan de simetrie. Cristalul aparţine de sigur sistemului triclinic.

2) Se recunoaşte existenţa a două zone, care nu sunt dreptunghiulare, sau găsim trei feţe care formează între ele două unghiuri drepte şi al treilea deosebit. In acest caz, examinând feţele în zonă, găsim că, unul din unghiurile a două feţe revine de două ori într'o rotaţie de 360°. In acest caz cristalul este monoclinic.

3) Găsim trei zone perpendiculare sau două zone înclinate; apoi găsim unghiuri care se repetă de patru ori în fiecare zonă; sau trei feţe care fac între ele trei unghiuri drepte. In acest caz cristalul este ortorombic.

4) Găsim mai multe zone perpendiculare între ele şi un-

ghiuri care se repetă în două din aceste zone, iar în o zonă găsim unghiuri de 90°. Cristalul aparţine sistemului tetragonal.

5) Forma exterioară a cristalelor aparţinând sistemelor : cubic, romboedric şi hexagonal, ne permit de a recunoaşte uşor aceste sisteme.

— După ce sistemul cristalin a fost determinat, trebue fixată poziţia planurilor de coordonate, la care vom raporta toate feţele. Vom căuta pe cât posibil de a lua aceste planuri dreptunghiulare pentru a simplifica calculele ; de ordinar se iau planuri paralele cu trei feţe ce concurează în acelaş punct. Apoi vom căuta a alege feţele care aparţin formei primitive, servindu-ne pentru aceasta de toate consideraţiunele care pot servi la aceasta precum : frecvenţa lor, relaţiunele cu direcţiele de clivaj etc.

— Pentru determinarea dimensiunelor formei primitive, găsim mai multe cazuri : In cazul cel mai general, care este acel al sistemului triclinic, avem cele trei axe neegale şi unghiurile axelor diferite. Va trebui dar să determinăm : unghiurile α, β, γ a axelor şi lungimele a şi c a axelor, luând $b = 1$. Pentru a putea determina aceste 5 necunoscute, ne trebue cel puţin 5 unghiuri independente, pe care le vom alege între unghiurile fundamentale, care sunt mai exact determinate, precum : unghiurile feţelor de prizmă, sau a pinacoizilor cu bazipinacoidul şi unghiul unei feţe de piramidă cu feţele prizmei şi cu pinacoizii.

Dacă trecem la alte sisteme cristaline, numărul elementelor de simetrie crescând, numărul necunoscutelor scade şi prin urmare ne trebue un număr din ce în ce mai mic de relaţiuni, aşa că, dacă ajungem la sistemul cubic, nu mai avem nevoe de a le determina, căci se ştie că axele sunt egale şi dreptunghiulare.

— După ce am ales feţele formei primitive, a căror notaţiune este cunoscută, ne rămâne a determina simbolele celorlalte feţe, servindu-ne de unghiurile măsurate. Putem întrebuinţa pentru aceasta mai multe metode, dintre care două sunt mai întrebuinţate : 1. *Metoda trigonometrică*, întrebuinţată de Kobell, Klein şi în timpurile din urmă perfecţionată şi complectată de Wyrouboff. In această metodă vom lua cristalii aşa cum se prezintă şi vom considera în interiorul lor triunghiuri rectilinii sau sferice, a căror rezolvire e bazată pe o serie de formule trigonometrice şi 2. *Metoda proiecţiilor cristalografice* întrebuinţată de Miller, Des Cloizeaux şi alţi cristalografi francezi şi germani.

— Pentru rezolvirea triunghiurilor sferice se face uz de un oare care număr de formule trigonometrice, pe care le vom aminti în scurt.

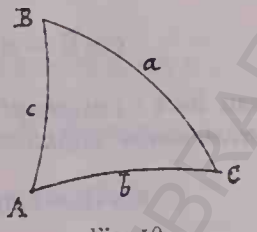


Fig. 50

Pentru triunghiurile sferice veri cari ⟨Fig. 50⟩, însemnând cu A, B, C unghiurile şi cu *a*, *b*, *c* laturile opuse, avem formulele următoare :

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B. \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned}\right\} \quad \langle\alpha\rangle$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad \ldots\ldots \quad \langle\beta\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A. \\ \operatorname{cotg} b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \operatorname{cotg} B. \\ \operatorname{cotg} a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \operatorname{cotg} A. \\ \operatorname{cotg} c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \operatorname{cotg} C. \\ \operatorname{cotg} c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \operatorname{cotg} C. \\ \operatorname{cotg} b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \operatorname{cotg} B. \end{aligned}\right\} \quad \langle\gamma\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b. \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{aligned}\right\} \quad \langle\delta\rangle$$

Pentru cazul triunghiurilor dreptunghice ⟨Fig. 51⟩, aceste formule se simplifică mult. Vom da metoda cunoscută în trigonometrie pentru a putea scrie mai uşor aceste formule. Admiţând că A este unghiul drept, să însemnăm laturile acestui unghiu prin : $\frac{\pi}{2} - b$ şi $\frac{\pi}{2} - c$, şi făcând abstracţie de unghiul drept să scriem elementele, unghiuri şi laturi în ordinea următoare : a, B, $\frac{\pi}{2} - c$, $\frac{\pi}{2} - b$, C.

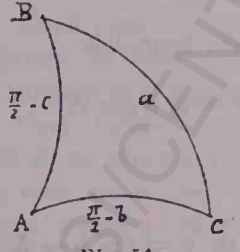


Fig. 51

Atunci vom zice că : *cosinusul unui element oare care este egal cu productul sinusurilor elementelor opuse.* Aşa : în figura precedentă, dacă considerăm unghiul B, elementele opuse sunt $\frac{\pi}{2} - b$ şi C, iar elementele adjacente sunt : $\frac{\pi}{2} - c$ şi a. Vom scrie :

$$\cos B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \sin C = \cos b \sin C.$$

sau încă : *cosinusul unui element este egal cu produsul cotg elementelor adjacente. Deci :*

$$\cos B = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) \operatorname{cotg} a = \operatorname{tg} c \operatorname{cotg} a.$$

Insă trigonometria ne dă formule direct calculabile prin logaritmi cu ajutorul cărora putem determina unele elemente când cunoaştem altele. Aşa : Să presupunem ca într'un triunghiu cunoaştem cele trei laturi *a*, *b*, *c* şi voim să determinăm unghiurile. Avem pentru aceasta formulele :

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}}$$

Vom ave încă formulele următoare

I. Se dau : A, b, c. Se caută a, B, C. Avem formulele :

$$\cos a = \frac{\cos b \sin(c+\varphi)}{\sin\varphi}, \text{ şi } \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg} b \cos A.$$

$$\operatorname{cotg} B = -\frac{\operatorname{cotg} A \cos(c+\varphi)}{\cos\varphi}, \text{ şi } \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg} b \cos A.$$

$$\operatorname{cotg} C = -\frac{\operatorname{cotg} A \cos(b+\varphi)}{\cos\varphi}, \text{ şi } \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg} c \cos A.$$

II. Date : a, b, A, Se caută c, B, C. Avem formulele

$$\sin(c+\varphi) = \frac{\cos a}{\cos b}\sin\varphi, \text{ cu } \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg} b \cos A$$

$$\sin B = \frac{\sin A \sin B}{\sin a}$$

$$\sin(C+\varphi) = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b \sin\varphi, \text{ cu } \operatorname{tg}\varphi = \cos b \operatorname{tg} A$$

III. Date : c. B, C, necunoscute a, b, A. Avem :

$$\cos(a+\varphi) = -\operatorname{cotg} C \operatorname{tg} B \cos\varphi, \text{ cu } \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg} c \cos B.$$

$$\sin b = \frac{\sin B \sin C}{\sin C}$$

$$\sin(A - \varphi) = \frac{\cos C \sin \varphi}{\cos B}, \text{ cu } \operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} B \cos c$$

IV. Date: a, B, C, necunoscute: b, c, A. Avem:

$$\operatorname{cotg} b = \frac{\operatorname{cotg} a \sin(C + \varphi)}{\sin \varphi} \text{ cu: } \operatorname{tg} \varphi = \cos a \operatorname{tg} B.$$

$$\operatorname{cotg} C = \frac{\operatorname{cotg} a \sin(B + \varphi)}{\sin \varphi} \text{ cu: } \operatorname{tg} \varphi = \cos a \operatorname{tg} C.$$

$$\cos A = \frac{\cos B \sin(C - \varphi)}{\sin \varphi} \text{ cu: } \operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} B \cos a$$

V. Date: A, B, C, se caută: a, b, c. Avem:

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(A + B + C) \cos \frac{1}{2}(B + C - A)}{\sin B \sin C}}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A + B - C) \cos \frac{1}{2}(A + C - B)}{\sin B \sin C}}$$

Se întrebuinţează de asemenea ecvaţiele lui Delambre sau a lui Gauss, precum şi analogiele lui Néper.

CAPITOL III

STUDIUL SISTEMELOR CRISTALINE

După cum am spus deja, vom studia sistemele cristaline comparativ în toate sistemele cristalografice, a căror principii au fost studiate mai înainte.

Vom începe cu sistema lui Levy, care este cea mai simplă şi se adresează de-a dreptul la corpuri care există în natură; vom trece apoi la sistema lui Naumann, care cere a ne închipui sistemul ideal de axe, pe care se bazează toată construcţia cristalină; vom fini cu sistema lui Miller, care tinde a se generaliza din ce în ce mai mult.

Vom căuta să prezentăm proiecţiunele formelor cristaline sub o formă cât mai uşoară de înţeles, cu atât mai mult că avem să ne servim de ele pentru calculele cristalografice.

Vom admite 7 sisteme cristaline, considerând sistemul rom-

boedric diferit de sistemul hexagonal, cu toate că putem trece așa ușor de la simetria ternară la cea senară sau vice-versa.

I.

Sistemul cubic.

După *Levy* forma primitivă a acestui sistem este: *Cubul* sau *Hexaedrul*. El are: 6 fețe care sunt niște patrate egale, și care se notează *p*; apoi 8 unghiuri solide egale, formate de unghiuri diedre drepte, care sunt notate *a*; în fine are 12 muchi identice corespunzînd la diedre drepte, și care sunt notate *b*. (Fig. 52).

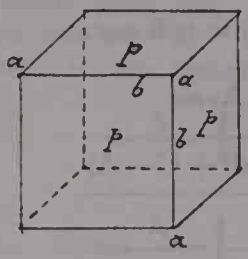


Fig. 52

Dacă prin mijlocul muchilor dispuse în același mod, facem să treacă planurile ABCD, EFGH, și IKLM, (Fig. 53) aceste planuri vor fi, fiecare paralel cu una din cele 3 fețe ale cubului care formează unghiul solid R, și vor determina prin intersecția lor trei drepte *pp'*, care sunt egale și dreptunghiulare, și care unesc mijlocurile fețelor opuse. Aceste trei drepte sunt axe de simetrie; și fiindcă trebue să întoarcem cubul în jurul uneia din ele de $\frac{360^0}{4} = 90^0$, pentru a se prezenta cu același aspect, axele vor fi de *simetrie cvaternară*. Deci, cubul are 3 axe de simetrie cvaternară, din care cauză Bravais a numit sistemul cubic, *tercvaternar*.

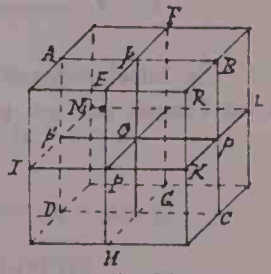


Fig. 53

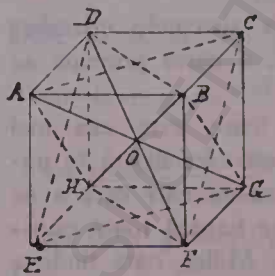


Fig. 54

Dacă prin diagonalele a două fețe opuse a cubului și prin muchile care le corespund, facem să treacă planurile ACEG, BDHF etc. (Fig. 54) aceste planuri dau patru intersecții, care sunt diagonalele cubului: AG, DF, BH și CE; aceste drepte sunt *axe de simetrie ternară*, căci trebue să întoarcem cristalul de $\frac{360^0}{3} = 120^0$ în jurul uneia din aceste axe pentru ca solidul să se prezinte cu același aspect.

In fine: dacă prin muchiile opuse: AE şi CG, EF şi DC etc. ducem planuri (Fig. 55) ele vor întâlnii planurile MPNQ etc. care ne au servit a determina axele cvaternare, şi vor da intersecţiile: MP, NQ etc. care unesc mijlocurile muchilor opuse, şi care sunt *axe de simetrie binară*, căci trebue să întoarcem cubul de $\frac{360^0}{2} = 180^0$, în jurul uneia din aceste axe, pentru ca el să se prezinte cu acelaş aspect. Există 6 de aceste axe.

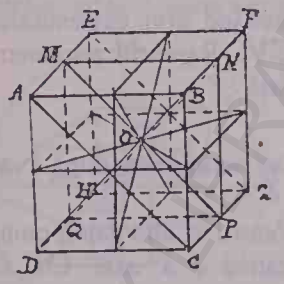


Fig. 55

Constatăm de asemenea că toate axele: cvaternare ternare şi binare se întâlnesc într'un punct comun *O* care este *Centrul de simetrie* a cubului.

Planurile ABCD, EFGH etc. care ne-au dat prin intersecţia lor axele cvaternare, sunt perpendiculare fiecare pe una din aceste axe: vom ave dar: *trei planuri de simetrie cvaternară*. De asemenea: planurile ACGE, ABHG etc. sunt perpendiculare fiecare pe o axă de simetrie binară: vom ave dară: *şase planuri de simetrie binară*. Nu există planuri de simetrie ternară (Fig. 56).

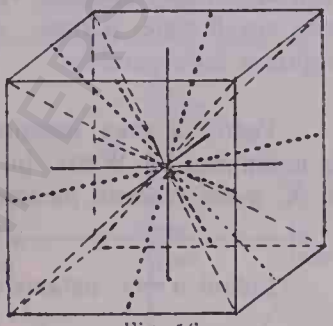


Fig. 56

Bravais reprezintă în rezumat simetria sistemului cubic prin:

$$3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^1, 6P^2.$$

Notaţiunea cubului după Levy este: *p*.

După Naumann, pentru a forma cubul, plecăm de la cele trei axe dreptunghiulare a sistemului cubic, notate: $x\bar{x}$, $y\bar{y}$, $z\bar{z}$, care se taie în O, care este origina axelor (Fig. 57). Porţiunele Ox, Oy, Oz sunt pozitive, iar prelungirile lor $O\bar{x}$, $O\bar{y}$, $O\bar{z}$ sunt negative. Parametrul corespunzător acestor axe este *a*. Planurile care vor forma cubul, vor fi aplicate aşa ca să treacă prin extremitatea unei axe şi să fie paralele cu planurile celorlalte două. Aşa: planul

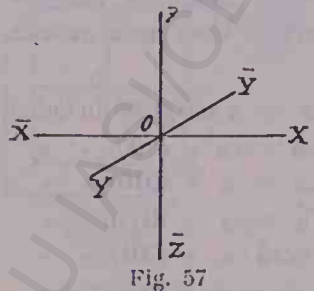


Fig. 57

trecând prin extremitatea X a axei Ox, va fi paralel cu planul ΞY. Raportul parametric, după Weiss va fi, pentru această față:

$$a : \infty a : \infty a.$$

iar notațiunea după Naumann va fi:

$$\infty O \infty$$

Pentru o altă față, cum ar fi acea ce trece prin extremitatea negativă $\bar{z}$ a axei $O\bar{z}$, raportul parametric va fi: $\infty a : \infty a : \bar{a}$, ceia ce ne permite a o distinge de fața precedentă, pe când notațiunea după Naumann va fi tot: $\infty O \infty$.

Aplicând la extremitățile tuturor axelor, fețe care să satisfacă condițiunei indicate, vom obține un solid închis de 6 fețe, care vor fi niște patrate, căci, laturile sunt egale cu paralele cuprinse între paralele.

Pentru a avea notațiunea cubului după Miller, plecăm de la notațiunea lui Weiss, în parametri. Așa: pentru fața aplicată în X, avem raportul parametric:

$$a : \infty a : \infty a,$$

Luând $a = 1$, parametrii devin:

$$1 : \infty : \infty.$$

Luând inversele, vom avea:

$$\frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty}$$

care dau indicii: 1 : 0 : 0. Deci, fața aplicată în X va avea notațiunea în indici: ⟨100⟩.

Se scriu de ordinar indicii în ordinea corespunzetoare axelor: x, y, z, și se afectează cu semnul — scris deasupra indicilor corespunzători porțiunelor negative a axelor. Vom avea astfeliu notațiunele următoare:

Pentru fața în x notațiunea: $a : \infty a : \infty a$ sau ⟨100⟩ în indici

» » » $\bar{x}$ » $\bar{a} : \infty a : \infty a$ » ⟨$\bar{1}$00⟩ » »

» » » y » $\infty a : a : \infty a$ » ⟨010⟩ » »

» » » $\bar{y}$ » $\infty a : \bar{a} : \infty a$ » ⟨0$\bar{1}$0⟩ » »

» » » z » $\infty a : \infty a : a$ » ⟨001⟩ » »

» » » $\bar{z}$ » $\infty a : \infty a : \bar{a}$ » ⟨00$\bar{1}$⟩ » »

Pentru a avea proiecţiunea polilor feţelor cubului, luăm sfera de proiecţiune şi înscriem în ea un cub, aşa ca, cele trei axe cvaternare să coincidă cu cele trei diametre ale sferei, iar centrul cristalului şi prin urmare origina axelor, să coincidă cu centrul sferei ⟨Fig. 58⟩. Este uşor de văzut că: normalele duse din centrul sferei pe feţele cubului, se confundă cu axele, aşa că, polii acestor feţe vor fi tocmai extremităţile: $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, a celor trei diametri a sferei.

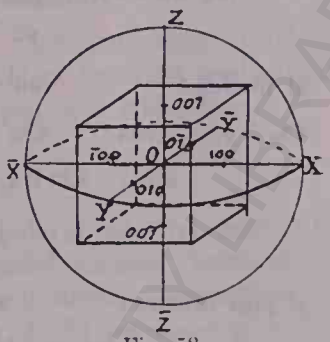


Fig. 58

Luând ca plan de proiecţie, planul cercului mare orizontal, care trece prin axele: $x\,\bar{x}$ şi $y\,\bar{y}$ iar punctul de vedere fiind în $\bar{z}$, proiecţiunele polilor feţelor cubului vor fi: ⟨Fig. 59⟩.

Polul feţei ⟨100⟩ în x.
« « ⟨$\bar{1}$00⟩ » $\bar{x}$,
« « ⟨010⟩ » y,
« « ⟨0$\bar{1}$0⟩ » $\bar{y}$,
Polii feţelor ⟨001⟩ şi ⟨00$\bar{1}$⟩» z.

Ştim că, axa $z\,\bar{z}$ fiind perpendiculară pe planul de proiecţiune, polii feţelor aplicate la extremităţile sale, se vor proiecta în z.

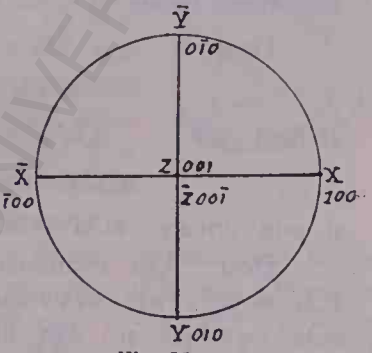


Fig. 59

— De oare ce elementele cubului sunt cunoscute, nu avem a face nici un calcul cristalografic. Ceia ce putem face este, de a determina raportul ce există între lungimele axelor cvaternare, ternare şi binare.

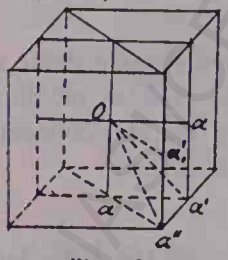


Fig. 60

Să considerăm axele: Oa cvaternară, Oa' binară şi Oa'' ternară ⟨Fig. 60⟩. In triunghiul Oaa', dreptunghic în a, avem:

$$O\bar{a'}^2 = O\bar{a}^2 + a\bar{a'}^2 \quad \text{sau}$$

$$O\bar{a'}^2 = 2O\bar{a}^2. \quad \text{Deci:}$$

$$Oa' = Oa\sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \langle 1 \rangle$$

In triunghiul Oa'' a', dreptunghic în a' avem:

$$O\bar{a''}^2 = O\bar{a'}^2 + a'\bar{a''}^2 \quad \text{sau} \quad O\bar{a''}^2 = 2O\bar{a}^2 + O\bar{a}^2 = 3O\bar{a}^2$$

De unde: $$Oa'' = Oa\sqrt{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad \langle 2 \rangle$$

De asemenea, în triunghiul Oaa'' dreptunghic în *a* vom avea:

$$aa'' = Oa'' \sin aOa''$$

și fiindcă: $aa'' = Oa'$, înlocuind valoarea lui Oa'' vom avea: $Oa' = Oa\sqrt{3} \sin aOa''$.

sau: $Oa\sqrt{2} = Oa\sqrt{3} \sin aOa''$; de unde:

$$\sin aOa'' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

și prin urmare: $aOa'' = 54^0\,45'$.

Însă triunghiurile dreptunghice Oaa'' și Oa'a'' sunt egale ca având: Oa'' comun, $Oa = a'a''$. Urmează dar că unghiurile aOa'' și Oa''a' sunt egale și fiind că în triunghiul Oa'a'' unghiul Oa'a'' este drept, trebue ca suma celor-l-alte să fie egală cu 90^0.

Deci: $Oa''a' + a''Oa' = 90^0$ De unde:

$$a''Oa' = 90^0 - Oa''a'$$

și fiind că: $Oa''a' = aOa'' = 54^0\,45'$ urmează că:

$$a''Oa' = 90^0 - 54^0\,45' = 35^0\,15'.$$

și prin urmare: $aOa' = aOa'' + a''Oa' = 54^0 45' + 35^0 15 = 90^0$.

Deci: Axa cvaternară face cu axa binară un unghiu: $aOa' = 90^0$; axa cvaternară face cu axa ternară un unghiu $aOa'' = 54^0 45'$ și: axa binară face cu axa ternară unghiul $a''Oa' = 35^0 15$.

Luând lungimea axei cvaternare egală cu 1, avem:

$$Oa : Oa' : Oa'' = Oa : Oa\sqrt{2} : Oa\sqrt{3}$$

sau: $$Oa : Oa' : Oa'' = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

— —

După Levy, toate formele cristaline ale sistemului cubic se pot deduce din cub prin truncheturi, și după cum se modifică toate elementele simetrice, sau numai jumătate din ele, obținem: 1) *Formele Holoedrice*, sau 2) *Formele hemiedrice*.

I. Formele holoedrice.

Formele holoedrice ale sistemului cubic, se deduc din cub prin două feluri de modificări. A) *Modificări pe unghiuri* și B). *Modificări pe muchi.*

A. Modificări pe unghiuri.

Modificările pe unghiuri se obţin înlocuind aceste unghiuri prin feţe, care să iee pe cele trei muchi ce formează acel unghiu, distanţe variabile ; vor rezulta prin urmare mai multe forme.

Ele sunt :

Octaedrul

Să considerăm unghiul O al cubului şi cele trei muchi Ox, Oy, Oz, care-l compun. Aceste muchi sunt egale şi lungimea comună se înseamnă cu *b*. Să presupunem că înlocuim acest unghiu prin o faţă, care ia pe cele trei muchi distanţele egale: Oa, Ob, Oc. Unghiul va fi înlocuit prin o faţă triunghiulară *abc*. (Fig. 61). Dacă repetăm această operaţie pe toate unghiurile cubului se obţine o formă compusă, care reprezintă cubul cu unghiurile înlocuite prin feţe. (Fig 62). Observăm că intersecţiile ab, ac, bc cu feţele cubului, sunt paralele cu diagonalele AB, AC, BC a acestor feţe. Dacă înaintăm cu trunchieturile către centrul cristalului, până ce feţele modificătoare ieu pe muchi distanţe egale cu lungimea totală a muchilor, intersecţiele cu feţele cubului se confundă cu diagonalele lor, iar din intersecţia celor opt feţe, ce înlocuesc unghiurile, va rezulta un solid cu 8 feţe, care se numeşte *Octaedru* (Fig. 63). Notaţiunea feţelor acestui solid va fi :

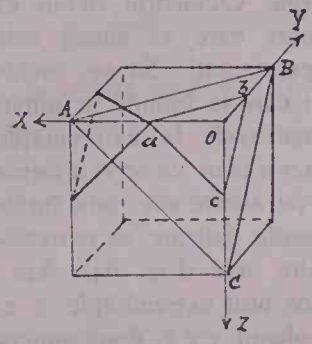


Fig. 61

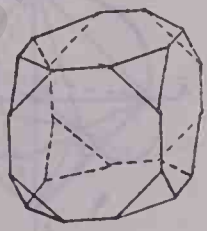


Fig. 62

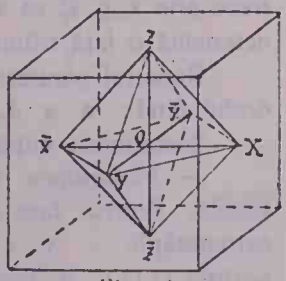


Fig. 63

$$b^{\frac{1}{x}} \quad b^{\frac{1}{x}} \quad b^{x}$$

şi fiind că feţele înlocuesc unghiul *a* vom avea simbolul :

$$a^{\frac{1}{x} : \frac{1}{x}} = a^{1}$$

Aceasta va fi notaţiunea şi a unei feţe, precum şi a solidului întreg.

Forma feţelor octaedrului este acea a unor triunghiuri ec-

vilaterale, căci avem: $zx = zy = z\bar{x}$.... ca oblice egal depărtate de piciorul O al perpendicularelor Oz, Ox, Oy.... Octaedrul are deci următoarele elemente: 8 feţe triunghiuri ecvilaterale egale, 12 muchi egale, care unesc extremităţile axelor cvaternare şi 6 unghiuri solide formate din 4 muchi egale.

Observăm că: axele cvaternare ale cubului reunesc cele 6 unghiuri ale Octaedrului două câte două; axele ternare reunesc centrele feţelor opuse; şi axele binare reunesc mijlocurile muchilor opuse.

— După Naumann, pentru a obţine Octaedrul trebue să aplicăm planuri care să atingă cele trei axe la extremităţi. Să ne închipuim un plan care se întinde la infinit, dar care atinge axele la extremităţile lor, x, y, z: acest plan va servi a forma faţa aplicată pe aceste axe, prin întâlnirea cu planurile aplicate pe extremităţile celorlalte axe (Fig. 64). Aşa: planul ce trece prin extremităţile x, z, şi $\bar{y}$, are cu planul x y z, două puncte comune x şi z, aşa că intersecţia celor două planuri va fi dreapta xz; de asemenea cu planul ce trece prin extremităţile y, z şi $\bar{x}$ va avea intersecţia zy, iar cu acel ce trece prin x, y, $\bar{z}$, va avea intersecţia xy. Aceste trei intersecţii determină o faţă triunghiulară xyz.

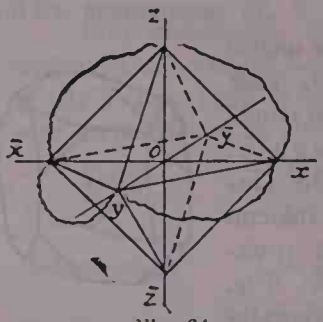


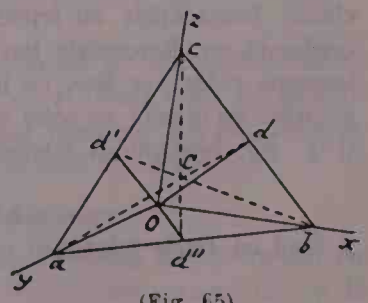
Fig. 64

Raportul parametric ce determină poziţiunea feţelor Octaedrului fiind: a : a : a.

Notaţiunea după Naumann va fi: *O*.

— Notaţiunea feţelor Octaedrului în indici este foarte simplă. Pentru faţa aplicată pe extremităţile x, y, z avem raportul: 1 : 1 : 1, a căror inverse dau notaţiunea în indici: (111).

Pentru celelalte feţe ale Octaedrului vom avea notaţiunea: $(\bar{1}11)$, $(1\bar{1}1)$, $(11\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(1\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{1}1\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{1}1)$.



(Fig. 65)

— Inainte de a ne ocupa de proiecţiunea feţelor Octaedrului, să determinăm câte-va relaţiuni necesare. Să considerăm faţa aplicată pe axele x y z (fig. 65) şi

să ducem diagonalele ad, bd', cd''; care se întretae în centrul C al feței. Se știe că: $aC = \frac{2}{3}$ ad, iar Oa este axa cvaternară, OC axa ternară și Od axa binară. Luând Oa = 1, în triunghiul cOa avem relațiunea:

$$\overline{ac}^2 = \overline{aO}^2 + \overline{Oc}^2 = 2\,\overline{Oa}^2 \text{ sau } ac = Oa\sqrt{2}.$$

și fiind că Oa = 1, rezultă: $ac = Oa\sqrt{2}$ . . . . . (1)

In triunghiul acd'' vom avea:

$$\overline{cd''}^2 = \overline{ac}^2 - \overline{ad''}^2$$

însă: $ad'' = \frac{ab}{2} = \frac{ac}{2}$. Deci $\overline{cd''}^2 = \overline{ac}^2 - \frac{\overline{ac}^2}{4} = \frac{3}{4}\overline{ac}^2$

și fiind că: $\overline{ac}^2 = 2\,\overline{Oa}^2$, avem: $\overline{cd''}^2 = \frac{6}{4}\overline{Oa}^2$ sau

$$cd'' = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

In triunghiul Ocd'' avem:

$\overline{Od''}^2 = \overline{cd''}^2 - \overline{Oc}^2$ sau $\overline{Od''}^2 = \frac{6}{4}\overline{Oa}^2 - Oa^2 = \frac{2}{4}\overline{Oa}^2$ sau:

$$Od'' = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

In fine: In triunghiul OCd'' avem:

$\overline{OC}^2 = \overline{Od''}^2 - \overline{Cd''}^2$ Insă: $Cd'' = \frac{1}{3}\,cd''$

Deci: $\overline{Cd''}^2 = \frac{1}{9}\overline{cd''}^2 = \frac{1}{9}\cdot\frac{6}{4}\overline{Oa}^2 = \frac{1}{6}\overline{Oa}^2$ Atunci:

$\overline{OC}^2 = \frac{1}{2}\overline{Oa}^2 - \frac{1}{6}\overline{Oa}^2 = \frac{1}{3}Oa^2$ Deci:

$$OC = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Pentru a avea înclinarea muchei *ac* pe axa Oc, observăm că: în triunghiul aOc avem:

$$Oa = Oc \text{ tg } acO \text{ de unde:}$$

$$\text{tg } acO = \frac{Oa}{Oc} = 1$$

$$\text{Deci: } acO = 45^0$$

Rezultă de aici că: muchile opuse ale Octaedrului formează unghiuri de 90^0.

Pentru a avea înclinarea feței pe axa cvaternară observăm că, în triunghiul Ocd'', în care unghiul Ocd'' reprezintă înclinarea căutată, avem:

$Od'' = cd'' \sin Ocd''$ şi $Oc = cd'' \cos Ocd''$.

Prin diviziune avem: $tg\, Ocd'' = \frac{Od''}{Oc} = \frac{1}{2}$.

Deci valoarea lui $Ocd'' = 35^0 15' 52''$. Prin urmare: unghiul a două feţe opuse a Octaedrului este de: $70^0, 31', 44''$.

Atunci în triunghiul Ocd'', unghiul $Od''c$ va avea ca valoare: $90^0 - 35^0 15' 52'' = 54^0 44' 8''$.

Deci: unghiul a două feţe adjacente a Octaedrului, care este dublul lui $Od''c$, va fi: $109^0 28' 16''$.

— —

Pentru a avea proiecţiunea polilor feţelor Octaedrului vom procede astfel:

Octaedrul fiind înscris în sfera de proiecţie (Fig. 66) să scoborâm din centrul ei care este şi centrul cristalului, normala *Od* pe faţa *xyz* a cristalului şi să o prelungim până ce atinge sfera în punctul A care este polul feţei. Pentru a construi proiecţiunea acestui pol, observăm că: punctul A se găseşte la intersecţia a două cercuri: Cercul mare $zA\bar{z}$, perpendicular pe planul de proiecţie şi care face cu cercul de origină un unghiu de 45^0, şi cercul $bMb'M'$ care nu mai este normal pe planul de proiecţie, şi trece prin diametrul bb' perpendicular lui aa'. Pentru a avea înclinarea acestui cerc pe planul de proiecţiune, vedem că: unghiul care o măsură este aOA. Dacă scoborâm normala Od' pe faţa adjacentă $z\,\bar{x}\,y$, se formează cadrilaterul $dOd'O'$ în care unghiurile în O şi O' sunt suplimentare. Insă unghiul O' are valoarea diedrului $\bar{x}\,y$, pe care am determinat-o: $109^0 28' 16''$. Suplimentul său va fi: $70^0 31' 44''$, care este valoarea unghiului $d'Od$ şi fiindcă unghiul aOA este jumătatea lui $d'Od$, va avea valoarea

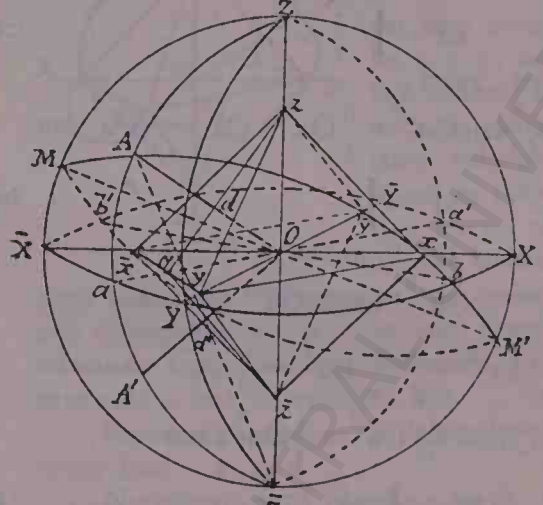


Fig. 66

de $\frac{70^0 31' 44''}{2} = 35^0 15' 52''$, care reprezintă înclinarea cercului bMb'M' pe planul de proiecțiune. Poziționea celor două cercuri fiind astfel bine determinată, este evident că proiecția polului se va găsi la intersecția proiecțiilor acestor două cercuri.

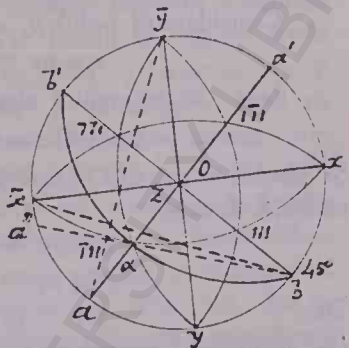


Fig. 67

Cercul $zA\bar{z}$, fiind perpendicular pe planul cercului de proiecție, se va proiecta după diametrul corespondent și fiindcă el face cu cercul de origină un unghiu de 45^0, vom lua de la $\bar{x}$ spre y arcul $\bar{x}a = 45^0$ și unind *a* cu O și prelungind până în *a'* vom avea diametrul aOa', care este proiecția cercului $zA\bar{z}$.

Pentru a avea proiecția cercului bAMb'M', rabatem cercul $zA\bar{z}$ în jurul lui aa': atunci punctul de vedere va veni în *b*. Punctul A găsindu-se la $35^0 15' 52''$ de la *a*, va cădea în *a''*; obținem poziția sa pe cercul de proiecție luând arcul $aa'' = 35^0 15' 52''$. ⟨Fig. 67⟩. Unind *a''* cu *b*, unde este punctul de vedere, obținem cu aa' intersecția *a*; atunci: prin b *a*, b', facem să treacă un cerc mare, care va fi proiecția lui bAMb'M'. El întâlnește proiecția aOa' a cercului $zA\bar{z}$ în punctul *a*, care va fi proiecția polului A, a cărui notație va fi: ⟨$\bar{1}11$⟩.

Dacă ducem un cerc mare prin x, *a*, $\bar{x}$, el va reprezenta proiecția cercului de 45^0 între *z* și y; el atinge diametrul de 45^0 între y și x, în punctul *a'*, care va fi proiecția polului feței xyz a Octaedrului. ⟨111⟩ Deci: *polii fețelor Octaedrului au proiecțiele lor la intersecția cercurilor mari de 45°*. Vom avea succesiv în a', a'', a''' proiecțiele polilor fețelor: ⟨111⟩, ⟨$1\bar{1}1$⟩ și ⟨$\bar{1}\bar{1}1$⟩.

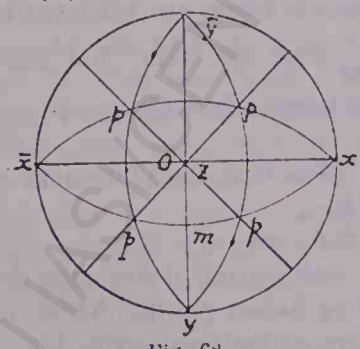


Fig. 68

Pentru a avea proiecția polilor fețelor ce se află sub planul de proiecție, constatăm că ele ating axa $z\bar{z}$ la extremitatea sa negativă; proiecțiunele lor se vor confunda cu acele ale fețelor superioare, iar notațiunele lor vor fi

aceleaşi, cu diferenţa că, ultimii indici a fiecărei notaţiuni, vor fi negativi. Vom avea astfel notaţiunele: ⟨$\bar{1}1\bar{1}$⟩, ⟨$1\bar{1}\bar{1}$⟩ ⟨$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$⟩ şi ⟨$11\bar{1}$⟩.

— Calculele cristalografice cu ajutorul proiecţiunelor stereografice, ne vor conduce a determina valoarea unghiurilor, pe care noi le am găsit deja. ⟨Fig. 68⟩.

Considerând polul *p*, al feţei xyz vom avea:

$$\cos px = \cos py = \cos pz.$$

Insă: în triunghiul sferic ypO, avem:

$$\cos py = \cos yO \cos Op + \sin yO \sin Op \cos yOp.$$

Şi fiindcă: $\cos yO = \cos 90^0 = 0$ şi $\sin yO = 1$. Formula precedentă devine:

$$\cos py = \sin py \cos yOp \qquad \text{sau:}$$

$$\operatorname{cotg} py = \cos yOp = \cos 45^0$$

Deci: $py = 54^0\,44'8 = px = pz.$

De asemenea: triunghiul pmO, în care $pmO = 90^0$ ne dă:

$$\cos pO = \cos pm \cos mO = \cos pm \cos 45^0$$

Deci: $$\cos pm = \frac{\cos pO}{\cos 45^0}$$

De unde: $pm = 35^0 15' 52''.$

Icositetraedrul sau Trapezoedrul

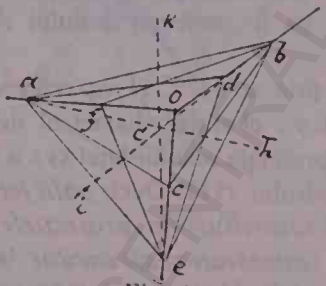


Fig. 69

Pentru a obţine acest solid după Levy, vom înlocui fiecare din unghiurile solide ale cubului prin feţe, care să iee pe muchile corespondente: două distanţe egale cu 1 şi a treia mai mică, egală cu $\frac{1}{m}$ ⟨Fig. 69⟩. Aşa: faţa *abc* ia distanţele $Oa = Ob = 1$ şi $OC = \frac{1}{m}$. Faţa va fi notată: $b^1 b^1 b^{\frac{1}{m}}$ şi fiind că ea înlocueşte unghiul *a* notaţiunea va deveni: $a^{\frac{1}{1}}$ ⟨[1]⟩ sau: a^m.

Insă, fiind că în O vine o axă ternară, trebue încă două feţe, care să iee distanţe asemeni pe fiecare muche. Astfel vom avea planurile: *ade* şi *bef*, care iau succesiv distanţele: $Oa = 1$,

1) Pentru a obţine aceste notaţiuni, divide n exponentul care e reprezentat de 2 ori, prin acel ce nu e de cât odată.

$Od = \frac{1}{m}$, $Oc = 1$ şi $Ob = 1$, $Oe = 1$, $Of = \frac{1}{m}$. Aceste trei planuri se taie două câte două, după dreptele : *ah, bi* şi *ek,* care la rândul lor se încrucişază în punctul C, aşa că, unghiul O va fi înlocuit cu un vârf obtuz, format de cele trei feţe : Cae, Cab, Cbe.

Dacă modificăm în acelaş mod celelalte unghiuri a cubului şi înaintăm cu trunchieturile până ce facem să dispară feţele cubului, vom obţine un solid care va avea : $3 \times 8 = 24$ feţe şi care se numeşte : *Icositetraedru* sau *Trapezoedru,* fiind că forma feţelor est acea a unui trapez simetric. In adevăr : observăm că, intersecţiele feţelor modificătoare, cu feţele cubului sunt paralele cu diagonalele acestor feţe ⟨Fig. 70⟩. Să ne închipuim că aceste modificaţii au avansat până la trecerea lor prin aceste diagonale. Să considerăm vârfurile obtuze C, C', C''. Feţele care formează vârful C, vor deveni : Cab, Cac, Cbc. Ele se vor întâlni succesiv cu feţele care formează vârfurile C' şi C'' : aşa, faţa Cac se întâlneşte cu C'Of după dreapta yA, şi cu C''Of, după yD ; şi atunci forma definitivă a feţei va fi : CAyD, care este un trapez simetric.

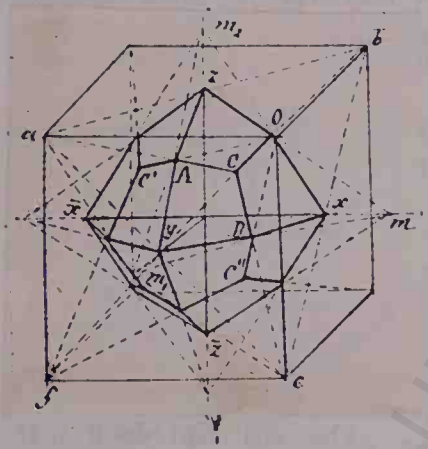


Fig. 70

Solidul are dară următoarele elemente ⟨Fig. 71⟩ : 24 de feţe ce sunt nişte trapeze simetrice ; 48 muchi de două specii : 24 muchi mai lungi X şi 24 muchi mai scurte V. Cele întâi unesc extremităţile axelor cvaternare cu a celor binare, pe când celelalte unesc axele ternare cu axele binare. Unghiurile solide în număr de 26 sunt de 3 specii : 6 unghiuri *p* regulate, compuse din câte 4 muchi mari, şi corespunzând extremităţilor axelor cvaternare ; 12 unghiuri simetrice A, formate de două muchi mari şi două mici, corespunzind extremităţilor axelor binare ; şi 8 unghiuri O formate de câte 3 muchi mici şi corespunzind extremităţilor axelor binare.

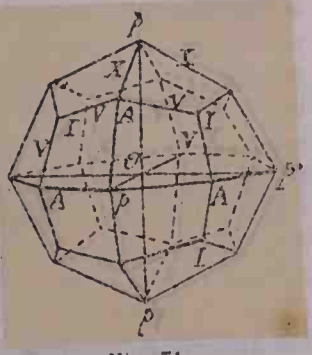


Fig. 71

Am văzut că, notaţiunea Trapezoedrului este: a^m, m fiind > 1. Trapezoedrele cele mai freevente sunt:

$b^1b^1b^{\frac{2}{3}}$ sau $a^{\frac{3}{2}}$

$b^1b^1b^{\frac{1}{2}}$ « a^2

$b^1b^1b^{\frac{1}{3}}$ « a^3

Este evident că: trapezoedrul va fi cu atât mai obtuz cu cât exponentul lui a va fi mai mic. Aşa: a^2 e mai obtuz decât a^3.

— După Naumann, raportul parametric corespunzetor Icositetraedrului este:

$$a : ma : ma \text{ sau } \frac{a}{m} : a : a \quad \text{cu } m > 1.$$

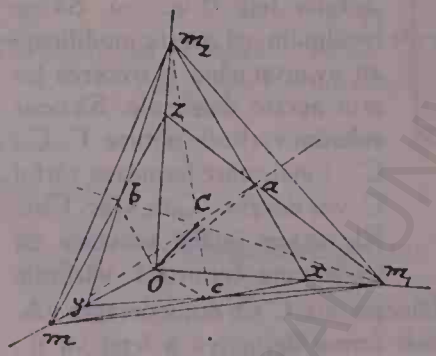


Fig. 72

Pentru a obţine solidul vom considera axele şi vom aplica feţe care să întâlnească o axă la extremitate, iar pe celelalte la distanţe $m > 1$. ⟨Fig. 72⟩ Aşa: faţa mxm_2, la distanţele Om şi Om_2 mai mari decât 1, şi $Ox = 1$.

Dacă construim în acelaş mod feţele: ym_1m_2 şi zmm_1, aceste două din urmă, vor întâlni pe cea dintâi după dreptele: m_2c şi ma, iar între ele vor da intersecţia m_1b. In acelaş timp cele trei intersecţii se taie în punctul C, ceia ce determină cele trei feţe: xaCc, ycCb, zaCb, cuprinse în conturnul xazbyc. Este uşor de văzut că feţele sunt nişte trapeze căci: $Ca = Cb = Cc$ şi $za = ax = xc = cy = yb = bz$. In adevăr: triunghiurile COa şi COc sunt egale având: $OC = OC$, apoi $Oa = Oc$ ca axe binare şi unghiurile $COc = COa$ ca unghiurile axelor binare cu axa ternară; deci, triunghiurile fiind egale trebue să aibă $Ca = Cc$. Găsim de asemenea: $Cc = Cb$; deci: $Ca = Cb = Cc$. De asemenea considerând triunghiurile zOa şi xOa, ele sunt egale căci: $Oa = Oa$, $OX = Oz$ şi $\angle zOa = xOa$ ca unghiurile axelor binare cu axa cvaternară, deci au: $za = xa$. Triunghiurile zaO şi zOb sunt egale având: $Oz = Oz$, $Oa = Ob$ ca axe binare şi unghiurile $zOb = zOa$ ca unghiurile axei cvaternare cu axele binare. Deci: $za = zb$: prin urmare: $xa = za = zb = \ldots$

Raportul parametric corespunzător acestei forme fiind: a : ma : ma, notaţiunea va fi:

$$m\,O\,m$$

— Să determinăm acum valoarea celor trei genuri de axe în raport cu feţele Icositetraedrului.

Fie Ox axa cvaternară, Oc axa binară şi CO axa ternară (fig. precedentă). Vom considera planul xOy, în care: Ox = Oy = 1 şi Om = Om_1 = m = 2. (Fig. 73). Dreptele ym_1 şi xm se întâlnesc în punctul A, aşa că OA este axa binară a trapezoedrului: Să unim x cu y; căpătăm cu OA intersecţia în d'', aşa că Od'' este axa binară a Octaedrului. Dacă ducem xa' paralelă cu Oy şi ya' paralelă cu Ox, Oa' va reprezenta axa binară a cubului. Deci: axa binară a trapezoedrului este intermediară, între aceea a cubului şi a octaedrului. Putem scrie:

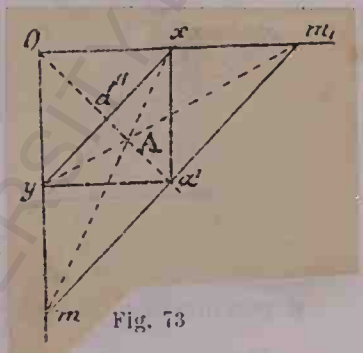


Fig. 73

$$OA + Aa' = Oa'.$$

Insă: $Aa' = \frac{OA}{m} = \frac{OA}{2}$, căci în triunghiul mOm', mediana Oa' este împărţită în punctul A aşa că:

$$OA = \frac{2}{3}Oa' \text{ şi } Aa' = \frac{1}{3}Oa'. \text{ Deci: } Aa' = \frac{OA}{2}$$

Atunci vom avea: $OA + \frac{OA}{m} = Oa'$, sau:

$$m.\,OA + OA = mOa'.$$

Insă $Oa' = x.\,y = l\sqrt{2}$ ca diagonala patratului Oxa'y; deci: $OA(m + 1) = m\,l\sqrt{2}$ sau:

$$OA = \frac{ml\sqrt{2}}{m+1}$$

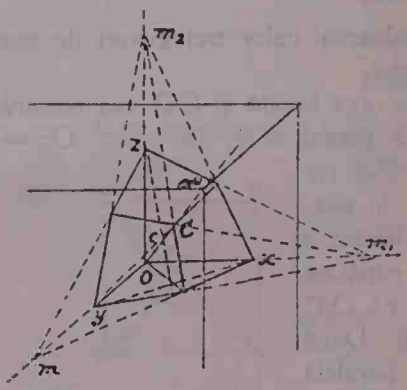
Aceasta ne reprezintă valoarea axei binare în funcţiune de parametrul *m*.

Dacă luăm: Od'' = 1. Atunci: Oa' = 2. Deci:

$$mOA + OA = 2m \text{ sau: } OA = \frac{2m}{m+1}$$

Aceasta este valoarea axei binare a trapezoedrului raportată la axa Octaedrului.

Pentru a găsi valoarea axei ternare (Fig. 74), vedem că: CO fiind această axă, Oc acea a octaedrului şi Oa'' acea a cubului, vom avea: $Oa'' = OC + Ca''$, însă:



(Fig. 74)

$$Ca'' = \frac{Oa''}{2} = \frac{2}{4}Oa'' = \frac{2Oa''}{m+2}$$

căci: $m = 2$, deci:

$$Oa'' = OC + \frac{2Oa''}{m+2}$$ de unde

$$(m+2)Oa'' = (m+2)OC + 2Oa$$

sau încă: $m.Oa'' = (m+2)OC$

şi prin urmare: $OC = \frac{mOa''}{m+2} = \frac{ml\sqrt{3}}{m+2}$.

Dacă luăm: $Oc = 1$ atunci: $Oa = 3$. Deci: $(m+2)OC = 3m$

şi prin urmare: $OC = \frac{3m}{m+2}$

Deci: raportul între axe va fi:

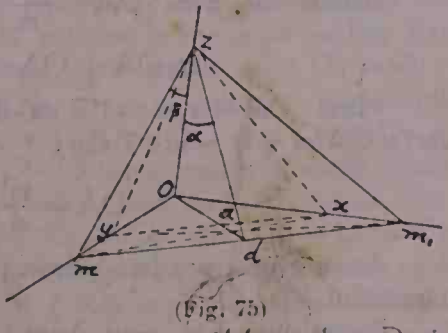
$$a : a' : a'' = 1 : \frac{ml\sqrt{2}}{m+1} : \frac{ml\sqrt{3}}{m+2}$$

— Să determinăm acum valoarea unghiurilor feţelor între ele, precum şi unghiurile muchilor cu axele (Fig. 75).

Avem mai întâi: $Ox = Oy = Oz = 1$ şi $Om = Om_1 = m$. Dacă voim să găsim valoarea unghiului $Ozd = \alpha$, care reprezintă înclinarea feţei pe axa Oz, vom considera triunghiul Ozd dreptunghic în O, care ne dă:

$Od = Oz\,tg\alpha$ de unde:

$$tg\,\alpha = \frac{Od}{Oz} = Od.$$



(Fig. 75)

Insă în triunghiul Odm, avem: ax paralel cu dm_1. Deci:

$\frac{Od}{Om_1} = \frac{Oa}{Ox}$ de unde: $Od = Om_1 \cdot \frac{Oa}{Ox}$ şi fiind că: $Ox = 1$, şi

$Om = m$, urmează că: $Od = mOa$. Atunci:

$$tg\alpha = m.Oa.$$

Insă $Oa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ deci: $tg\,\alpha = m\sqrt{\frac{1}{2}}$ sau în definitiv:

$$tg\,\alpha = \frac{m}{2}\sqrt{2}.$$

Deci: *înclinarea feței pe axa cvaternară depinde de valoarea lui m.*

Așa: pentru $m = 2$ avem: $tg\,\alpha = \sqrt{2}$: deci:

$$\alpha = 54^0 44' 8''.$$

— Pentru a avea valoarea unghiului β, pe care-l face muchea zm cu axa Oz, observăm că: în triunghiul Ozm avem:

$Om = Oz\,tg\,\beta$. de unde: $tg\,\beta = \frac{Om}{Oz} = Om$ sau în definitiv

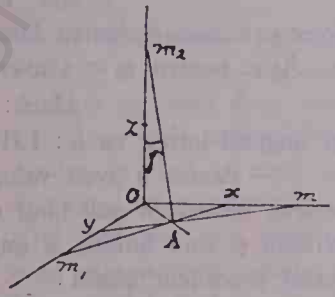
$$tg\,\beta = m.$$

Așa: pentru $m = 2$, $\beta = 63^0 26'$.

Pentru muchea scurtă, unghiul pe care-l face cu axa, (Fig 76) reprezentat prin γ, va fi dat de triunghiul OAm_2, în care avem:

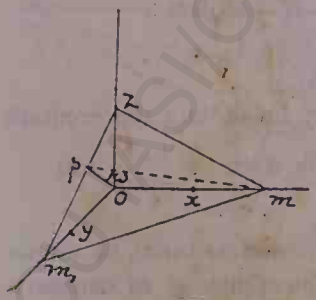
$OA = Om_2\,tg\,\gamma$. de unde:

$$tg\,\gamma = \frac{OA}{Om_2} = \frac{OA}{m} = \frac{\frac{m\sqrt{2}}{m+1}}{m} = \frac{\sqrt{2}}{m+1}.$$



(Fig. 76)

Pentru a avea valoarea diedrului corespunzător muchei lungi, observăm că, acest diedru este divizat în două părți egale prin planul axelor cvaternare. Considerând diedrul corespunzător muchei zm_1, vedem că el este împărțit în două prin planul yz. (Fig. 77). Dacă din centrul O scoborâm normala Op pe muchea zm_1 și dacă unim pe p cu m, este evident că unghiul $mpO = \omega$ va fi jumătatea unghiului plan corespunzător diedrului. Atunci în triunghiul mpO avem:



(Fig. 77)

$$\sin \omega = \frac{Om}{pm} \text{ şi } \cos \omega = \frac{pO}{pm}$$

Deci: $tg\ \omega = \frac{Om}{pO} = \frac{m}{pO}$. Pentru a avea valoarea lui pO, considerăm triunghiurile dreptunghice pOz şi Om_1z, care ne dau:

$$\frac{pO}{Oz} = \frac{Om_1}{zm_1}, \text{ de unde:}$$

$$pO \times zm_1 = Om_1 \times Oz \text{ sau: } pO \times zm_1 = m.$$

Deci:
$$pO = \frac{m}{zm_1}$$

Insă în triunghiul Om_1z, avem:

$m_1z^{-2} = Om_1^{-2} + Oz^{-2} = m^2 + 1$. Deci $zm_1 = \sqrt{m^2 + 1}$.

atunci: $pO = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$. Şi prin urmare:

$$tg\ \omega = \frac{m}{\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}} = \sqrt{m^2+1}.$$

Pentru a avea valoarea întreagă a diedrului, vom lua dublul lui ω. Aşa: pentru $m = 2$ avem: $tg\ \omega = \sqrt{5}$

Deci: $\omega = 65^0 54' 30''$

şi unghiul întreg va fi: $131^0 49'$.

— Pentru a avea valoarea diedrului corespunzetor muchilor scurte, observăm mai întâi că, planul care trece prin axa cvaternară şi una binară, îl împarte în două: — Procedând ca şi în cazul precedent găsim:

$$tg\ \beta = \frac{\sqrt{m^2 + 2m + 3}}{m - 1}.$$

aşa: pentru $m = 2$ avem: $tg\ \beta = \sqrt{11}$ deci:

unghiul întreg va fi: $146^0 27'$.

— Pentru a avea notaţia după Miller, luând faţa reprezentată prin raportul parametric: a : ma : ma, vom avea: $\frac{1}{1}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}$ sau m^2 m m sau ⟨mii⟩.

— Pentru a face proiecţia feţelor Icositetraedrului, să considerăm acest solid înscris în sfera de proiecţiune, şi să căutăm a determina proiecţia polilor feţelor: zaTf, aTgy şi gTfx, cuprinse

între axele: Ox, Oy şi Oz. (Fig. 78). Observăm că, punctul T fiind extremitatea axei ternare, prin acest punct trec planurile cercurilor mari de 45^0 între x şi y, x şi z şi y şi z, şi că, aceste planuri tae feţele după dreptele Tx, Ty, Tz. Insă picioarele normalelor scoborâte pe aceste trei feţe pentru a determina polii, sunt aşezate pe dreptele Tx, Ty Tz; deci, proiecţiunele acestor poli trebue să se găsească pe proiecţiele celor trei cercuri mari de 45^0 între x şi y, x şi z şi y şi z. Vom lua dar cercul de proiecţie şi după ce vom duce diametrele care reprezintă axele, să construim mai întâi proiecţiele cercurilor de 45^0, şi care sunt: diametrul tt' şi cercurile $yT\bar{y}$ $xT\bar{x}$, care trec prin punctul T, care este proiecţia polului feţei Octaedrului şi în acelaş timp extremitatea axei ternare. (Fig. 79). Deci polii celor trei feţe trebue să se projecteze pe arcurile Tx, Ty, Tz.

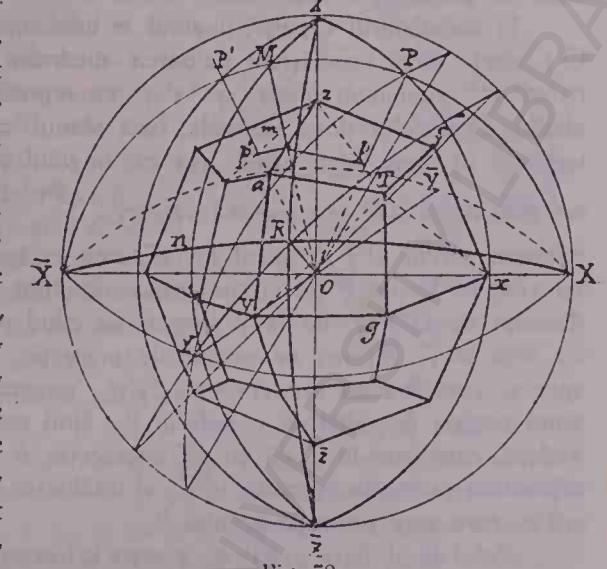


Fig. 78

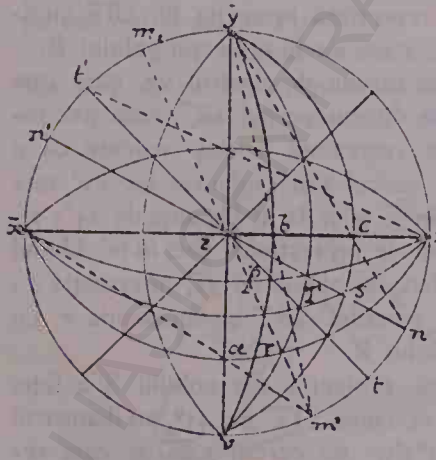


Fig. 79

Să considerăm mai întâi faţa zaTf: polul seu P se găseşte la intersecţia a două cercuri mari: $zP\bar{z}$ care este de 45^0 şi a cărui proiecţie este tt'; şi cercul $yP\bar{y}$, a cărui proiecţiune trebue să o căutăm. Să determinăm polul P' al feţei adjacente la muchea *za*, şi prin dreptele OP şi OP' să ducem un plan, a

cărui urmă pe cele două fețe vor fi dreptele: pm și p'm, iar pe sfera de proiecție cercul mare: xPMP'x̄.

In cadrilaterul Opmp', unghiul *m* este suplimentul unghiului O; deci, dacă cunoaștem valoarea diedrului za, care să fie: 131°48' 55", suplimentul seu: 48°11'14" va reprezenta valoarea unghiului O a celor două normale. Insă planul zyz̄, împarte aceste unghiuri în două părți egale, așa că, unghiul plan MOP, măsurat prin arcul MP, va ave ca valoare: $\frac{48°11'14}{2} = 24°5'37"$. Dacă rabatem cercul xPx̄ în jurul lui xx̄, este evident că, punctul M va veni în Y, iar P pe circonferința cercului de proiecțiune la distanța de 24°5'37 de la y spre x, pe când punctul de vedere va veni în ȳ. Atunci pe cercul de proiecție, plecând de la y spre x, vom lua un arc ym' = 24°5'37; punctul m' care reprezintă poziția de rabatere a polului P, fiind unit cu punctul de vedere, care este în ȳ, dă cu xx̄ intersecția *b*. Cercul mare yby̆ reprezintă proiecția cercului yPȳ; el întâlnește cercul tt' în punctul *p*, care este proiecția polului P.

Polul R al fetei aygT se găsește la intersecția cercului yRȳ de 45° între x și z, cu cercul zRz̄, a cărui proiecție trebue să o căutăm. Acest cerc fiind normal pe planul de proiecție, se va proiecta după un diametru. Fiind că diedrul *ay* are aceiaș valoare ca și *za*, cercul zRz̄ face cu planul zyz̄, un unghiu de: 24°5'37". E de ajuns dar de a uni pe *m'* cu z și de a prelungi în m_1; diametrul m'zm_1. care reprezintă proiecția lui zRz̄, întâlnește cercul yTȳ în punctul *r*, care va fi proiecția polului R.

De asemenea putem să ne servim de diedrul yg, care este egal cu ya; în acest caz, dacă ducem cercul xRx̄, vom ave intersecția *n* cu zyz̄; atunci *yn* reprezintă aceiaș valoare ca și MP, adică: 24°5'37 . Rabatând cercul ynzȳ în jurul lui yy' spre x, punctul de vedere va veni în x̄ și *n* la o distanță de 24°5'37" spre *x*, pe circonferința cercului de proiecțiune, deci în m'. Unind acest punct cu punctul de vedere, se obține cu yȳ, intersecția *a'*; cercul xax̄ reprezintă proiecția cercului xRx̄ și intersecția *r* cu cercul yTȳ, va fi proiecția polului R.

In acelaș mod vom găsi că, proiecția *s* a polului S a fetei xTfx se găsește la intersecția cercului xTx̄ de 45°, cu diametrul *m'n'* care face un unghiu de 24°5'37 cu cercul xΞx̄ și care reprezintă proiecția cercului zSz̄.

— Pentru a scrie notațiunea în indici a tuturor polilor fețelor,

observăm că, este de ajuns a determina aceste notaţiuni pentru feţele a căror poli se află în octantul xyz. (Fig. 80). Polul *p* reprezintă faţa care atinge axa de *z* la extremitate, deci notaţiunea sa parametrică va fi: ma : ma : a, sau în indici: (1 m). Pentru a scrie notaţiunea celorlalte feţe, observăm că în notaţiunea generală avem doi indici egali cu *1* şi un indice *m*, şi că indicele *m* se referă la axa atinsă la extremitate.

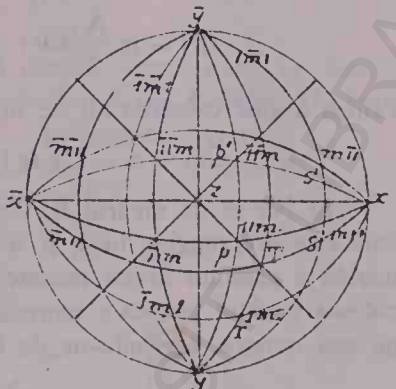


Fig. 80

Servindu-ne de această observaţie vom scrie îndată notaţiunile: (1 m 1) pentru *r*, şi (m 1 1) pentru *s*. Pentru a scrie notaţiunele polilor care cad în celelalte octante, procedăm astfeliu: rabatem semicercul inferior în jurul lui $x\bar{x}$: atunci y vine în $\bar{y}$ şi polii p, r, s în p', r' s', a căror notaţiune se va obţine schimbând indicii care corespund lui y (cei al doilea) în negativi; vom ave: pentru p': (1$\bar{1}$m), r' (1m1) şi s (m$\bar{1}$1). Dacă mai rabatem semicercul din dreapta în jurul lui $y\bar{y}$, atunci x vine în $\bar{x}$; deci vom schimba cei întâi indici în negativi, şi vom ave: ($\bar{1}$ $\bar{m}$ 1) ($\bar{m}$ $\bar{1}$ 1) ($\bar{1}\bar{1}$m) şi ($\bar{m}$11) ($\bar{1}$1m) ($\bar{1}$m1). In fine pentru a ave polii feţelor de sub planul de proiecţie vom face indicii corespunzetori lui *z*, adică pe cei din urmă, negativi.

— Să ne ocupăm acum cu calculul elementelor cristalografice a Trapezoedrului, în amândouă metodele.

I. *Prin metoda directă, trigonometrică.* Putem să avem două cazuri, după cum ni se dă: diedrul corespunzător m u c h e i lungi A, sau muchei B şi se caută valoarea lui *m*. (Fig. 81).

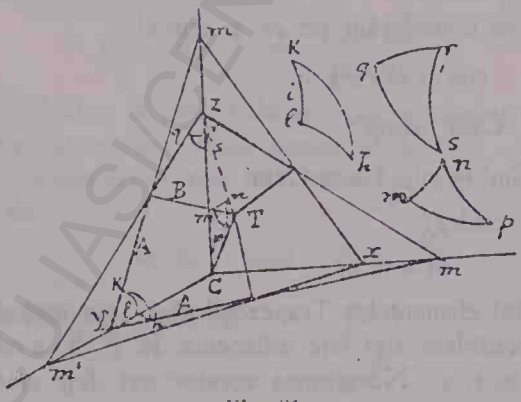


Fig. 81

a). Se dă diedrul A. Considerăm triunghiul sferic hkl, în care avem: $h = k = \frac{A}{2}$.

Deci laturile opuse

sunt egale. Se calculează inclinarea feţei pe axa *y* prin formula:

$$\text{tg } i = \text{tg } \frac{A}{2} \text{ sin } i \quad \text{sau} \quad \text{sec } i = \text{tg } \frac{A}{2}.$$

Pentru a găsi valoarea lui *m*, în triunghiul ymC avem:

$$Cm = m = Cy \text{ tg } i \quad \text{sau:} \quad m = \text{tg } i.$$

b) Ni se dă diedrul B. Considerăm triunghiul sferic *mnp*, care este dreptunghic în *n* şi a cărui unghiu *p* este de 60^0 ca unghiu a planului axelor ternare cu planul axelor binare. Putem calcula unghiul *np*, care reprezintă inclinarea feţei trapezoedrului pe axa ternară, servindu-ne de formula:

$$\cos np = \frac{\cos m}{\sin p} = \frac{\cos B}{\sin 60^0}$$

Cunoscând pe *np*, pentru a găsi inclinarea feţei pe axa cvaternară, observăm ca în triunghiul CTz avem: $TCz = 54^044'8''$ care este unghiul axei ternare cu axa cvaternară.

Deci: $CzT + CTz = 180^0 - 54^044'8'' = 125^015'52''$.

Atunci: $CzT = 125^015'52 - CTz = 125^015'52'' - np$.

Considerând atunci triunghiul sferic qrs, dreptunghic în s, vedem că unghiul *r*, reprezintă unghiul planului axelor cvaternare cu planul axelor binare, care este de 45^0. Deci vom ave:

$$\cos q = \cos rs \text{ sin } r.$$

sau:
$$\cos \frac{A}{2} = \cos CzT \text{ sin } 45^0$$

Cunoscând $\frac{A}{2}$ deducem pe A şi deci pe *m*.

Insă noi putem să considerăm pe *qr* şi atunci:

$$\cos qr = \text{cotg } q.$$

Atunci: în triunghiul Czm' avem:

$$Cm' = m = Cz \text{ tg } Czm'$$

Şi fiind că: $Cz = 1$. rezultă:

$$m = \text{tg } qr.$$

— Pentru calculul elementelor Trapezoedrului prin metoda proiecţiunelor, vom considera trei feţe adjacente, R, P, S, a căror proiecţiuni sunt: p, r, s. Notaţiunea acestor trei feţe este:

P . . . . . 11 m
R . . . . . 11 m
S . . . . . m 11

Vom ave de examinat două cazuri, după cum se dau: diedrul A sau diedrul B. (fig. 82)

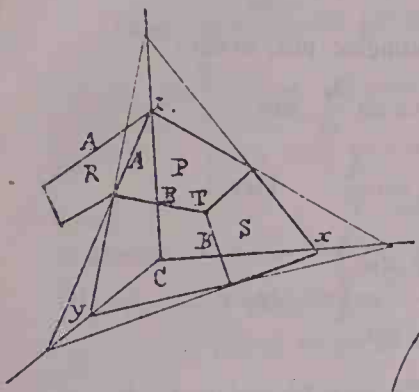


Fig. 82.

In proiecție avem:

$$cp = cr = \frac{180 - A}{2} \text{ și}$$

$$dp = ds = \frac{180 - B}{2}.$$

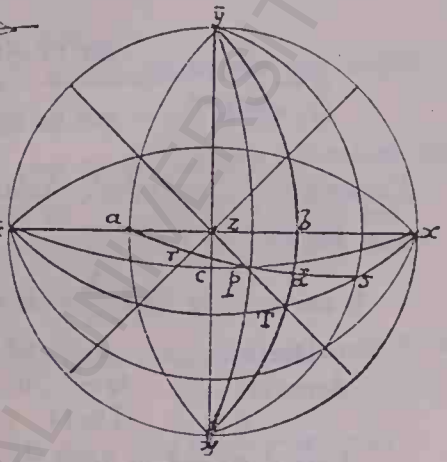


Fig. 83.

I. Se dă diedrul A și se cere valoarea lui *m*. (Fig. 83). Să considerăm fața P a cărei ecuație generală este:

$$\frac{a}{h} \cos px = \frac{b}{k} \cos py = \frac{c}{l} \cos pz.$$

avem: a = b = c = 1 și h = 1, k = 1, l = m.

Deci ecuația devine: $\cos px = \cos py = \frac{1}{m} \cos pz.$

De unde: $m = \frac{\cos pz}{\cos py}$

Pentru a găsi valoarea lui *m* trebue să obținem pentru cos pz și cos py, valori depinzând de A.

Considerăm mai întâi triunghiul sferic dreptunghic pcz care ne dă:

$$\sin zc = \operatorname{cotg} 45^0 \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

Insă: sin zc = cos cy. Deci:

$$\cos cy = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \quad \ldots\ldots \text{(1)}.$$

In triunghiul sferic dreptunghic pcy avem :

$$\cos py = \cos cy \sin cp.$$

sau : $$\cos py = \cos cy \sin \frac{A}{2}.$$

Insă : în triunghiul sferic dreptunghic pcz, avem :

$$\cos pz \quad \cos cz \sin \frac{A}{2} \quad \text{sau :}$$

$$\cos pz = \sin cy \sin \frac{A}{2} \qquad \text{Deci :}$$

$$m = \frac{\cos pz}{\cos py} \quad \frac{\sin cy \sin \frac{A}{2}}{\cos cy \sin \frac{A}{2}} \quad tg\, cy \quad . \quad . \quad . \quad \langle 2 \rangle$$

Exemplu : $\frac{A}{2}$ $65^0 54' 27''$. Aplicând logaritmii la formula ⟨1⟩ vom ave :

$$lg \cos cy \quad lg \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \quad lg \operatorname{cotg} 65^0 54' 27 \quad 9.65045.$$

Deci : $cy \quad 65^0 26' 20''.$

Atunci : $lg\, m \quad lg\, tg\, 65^0 26' 20'' = 0.30110.$

Deci : $m = 2.$

Fața P va ave în acest caz notațiunea : ⟨112⟩.

II⟩. Cunoaștem diedrul B. Fețele P și S sunt în zonă cu o față A a dodecaedrului romboidal, așa că prin proiecțiunile *p, s, a* a polilor lor putem face să treacă un cerc mare. Insă polul *a* este la 90^0 de toate punctele cercului mare $yb\bar{y}$. Deci :

$$ap \quad 90^0 - pd = \frac{B}{2}.$$

In acelaș timp avem : $az = 45^0$.

Atunci în triunghiul sferic *azp*, avem :

$$\cos ap \quad \cos az \cos zp + \sin az \sin zp \cos azp.$$

Inlocuind valorile date mai sus, și fiind că :

$$azp \quad 90^0 + 45^0 \quad 135^0.$$

vom ave : $$\cos \frac{B}{2} \quad \cos 45^0 \cos zp + \sin 45^0 \sin zp \cos 45^0$$

Şi fiind că : $\sin 45^0 = \cos 45^0$ urmează :

$$\cos\frac{B}{2} = \cos 45^0 \langle \cos zp + \sin zp . \cos 45^0 \rangle$$

Dacă punem : $\cos 45^0 = tg\,\varphi$ rezultă : $\varphi = 35^0 15' 52''$.

Deci : $\cos\frac{B}{2} = \cos 45^0 \langle \cos zp - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \sin zp. \rangle$ sau :

$$\cos\frac{B}{2} = \cos 45^0 \langle \cos zp \cos\varphi - \sin\varphi \sin zp \rangle$$

sau : $\cos\varphi \cos\frac{B}{2} = \cos 45^0 \cos\langle zp + \varphi\rangle$.

şi atunci : $\cos\langle zp + \varphi\rangle = \dfrac{\cos\varphi \cos\frac{B}{2}}{\cos 45^0}$ . . . . . ⟨1⟩

Pentru a găsi *cos py* , în triunghiul sferic zpy, avem :

$$\cos py = \sin zp \cos pzy = \sin zp \cos 45^0.$$

Înlocuind în formula care ne dă valoarea lui *m* vom avea :

$$m = \frac{\cos pz}{\cos py} = \frac{\cos pz}{\sin pz \cos 45^0} = \frac{\cos pz}{\sin pz} \frac{1}{\cos 45^0}, \text{ sau}$$

$$m = \frac{\cot g\, pz}{\cos 45^0} \quad . \quad . \quad . \quad \langle 2\rangle$$

Exemplu. Fie : $\frac{B}{2} = 64^0 45' 56''$. Aplicăm logaritmii formulei ⟨1⟩ şi avem :

$$\lg\cos\langle pz + \varphi\rangle = \lg\cos\varphi + \lg\cos\frac{B}{2} - \lg\cos 45^0$$

şi fiind că : $\varphi = 35^0 15' 52'$. avem :

$$\lg\cos\varphi - \lg\cos 45^0 = 0.06247$$

deci : $\lg\cos\langle pz + \varphi\rangle = \lg\cos\frac{B}{2} + 0.06247$

Aplicând logaritmii la formula ⟨2⟩ avem :

$$\lg m = \lg\cot g\, pz - \lg\cos 45^0 \quad \text{sau :}$$

$$\lg m = \lg\cot g\, pz + 0.15052 \quad \text{deci :}$$

$$\lg\cos\frac{B}{2} = 9.62972$$
$$+ 0.06247$$
$$9.69219 = \lg\cos\langle pz + \varphi\rangle.$$

De unde : $pz + \varphi = 60^0 30' 40''$

şi fiind că $\varphi = 35^0 15' 52''$ urmează că :

$$pz = 25^0 14' 48''$$

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deci: $\lg \operatorname{cotg} pz = 0.32645$

$+ 0.15052$

$\lg. m = 0.47697$

Deci: $m = 3$

Atunci notaţiunea feţei P în acest caz este: ⟨113⟩.

— —

Pentru a putea face transformaţiunea notaţiunelor lui Levy în Naumann şi Miller, ne putem servi de următoarele formule generale:

$$b^{\frac{1}{q}}\, b^{\frac{1}{q}}\, b^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{q}:\frac{1}{p}} = a^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\,O\,\frac{p}{q} = a : a : \frac{q}{p}a = \langle pqq \rangle.$$

Pentru principalele Trapezoedre vom ave:

$$b^1\, b^1\, b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}O\frac{3}{2} = a : a : \frac{2}{3}a = \langle 322 \rangle.$$

$$b^1\, b^1\, b^{\frac{1}{2}} = a^2 = 2O2 = a : a : \frac{1}{2}a = \langle 211 \rangle.$$

$$b^1\, b^1\, b^{\frac{1}{3}} = a^3 = 3O3 = a : a : \frac{1}{3}a = \langle 311 \rangle.$$

— —

Să considerăm acum un trapezoedru cunoscut ⟨113⟩ de ex. şi să calculăm diversele sale elemente. Pentru axa binară avem:

$$a'' = \frac{m\sqrt{2}}{m+1} \quad \text{Deci: } a'' = \frac{3\sqrt{2}}{4} = 1.0609.$$

Pentru axa ternară:

$$a''' = \frac{m\sqrt{3}}{m+2} \quad \text{Deci: } a''' = \frac{3\sqrt{3}}{5} = 1.041.$$

Unghiul α al unei feţe cu axa cvaternară, este dată prin:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{2}\sqrt{2} \quad \text{Deci:}$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg m - \lg 2 + \frac{\lg 2}{2} \quad \text{sau:}$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg 3 - \lg 2 + \frac{\lg 2}{2} \quad \text{sau:}$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = 0.4771213$$

$$- 0.3010300$$

$$0.1760913 + 0.1505150.$$

sau: $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0.3266063$ Deci: $\alpha = 64^0 45' 30''$.

Şi atunci unghiul a două feţe opuse este: $2\alpha = 129^0 3'$

Unghiul β al muchei lungi cu axa cvaternară este dat prin relaţiunea : $\operatorname{tg} \beta = m$.

Pentru $m = 3$ avem : $\lg \operatorname{tg} \beta = \lg 3$. Deci : $\beta = 71^0 33' 50''$.

Şi atunci unghiul a două muchi opuse este :

$$2\beta = 143^0 7' 40''.$$

Unghiul γ a muchei scurte cu axa este dat prin :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{2}}{m+1} = \frac{1}{m+1}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} = 0.25\sqrt{2}.$$

$$\text{Deci : } \lg \operatorname{tg} \gamma = \lg 0.25 + \frac{\lg 2}{2} = 0.1505150 + 9.39794$$

$$\lg \operatorname{tg} \gamma = 9.5484550$$

Deci : $\gamma = 19^0 28' 10$.

Diedrul corespunzetor muchei lungi este dat prin :

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{m^2 + 1}$$

Pentru $m = 3$ avem : $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{10}$.

Atunci : $\lg \operatorname{tg} \alpha = \frac{\lg 10}{2} = \frac{1}{2}$. Deci : $\alpha = 72^0 27'$.

Şi prin urmare : $2\alpha = 144^0 54'$.

Pentru diedrul corespunzetor muchei scurte avem :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{m^2 + 2m + 3}}{m - 1} = \frac{\sqrt{18}}{2}.$$

Deci : $\lg \operatorname{tg} \beta = \frac{\lg 18}{2} - \lg 2 = \frac{1.2552725}{2} - 0.3010300$.

Sau : $\lg \operatorname{tg} \beta = 0.6276362$

$$- 0.3010300$$

$$= 0.3266062$$

Deci : $\beta = 64^0 45' 40$ şi prin urmare :

$$2\beta = 129^0 31' 20$$.

BCU IAŞI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Trioctaedrul sau Octaedrul piramidat.

Pentru a obține acest solid după Levy, trebue să înlocuim unghiurile solide ale cubului prin trei fețe, fiecare luând pe o muche o distanță întreagă și pe celelalte două, distanțe egale cu $\frac{1}{m}$ (Fig. 84). Astfeliu: fața *Aeg* ia distanțele:

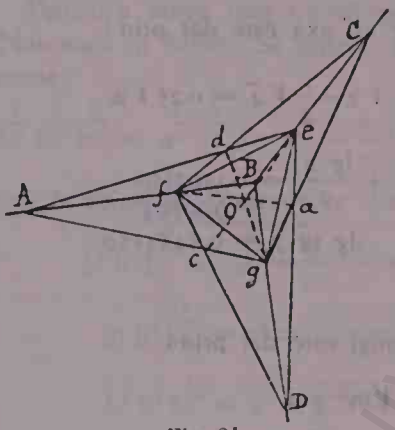


Fig. 84.

$$BA = b^1,\ Be = b^{\frac{1}{m}}\ B\,g = b^{\frac{1}{m}}$$

Notația parametrică va fi:

$$b^1\ b^m\ b^{\frac{1}{m}} \text{ sau } a^{\frac{1}{m}}.$$

Celelalte două fețe Cfg și Dfe se vor întâlni între ele și cu prima față și vor da intersecțiele: *gd*, *ec*, și *af*, a căror intersecție comună O va forma un vârf cu 3 fețe, mai obtuz de cât vârful B și a cărui fețe: AdOc, CdOa și DaOc sunt dirijate către muchile cubului. Este evident că: dacă înlocuim toate unghiurile cubului prin câte trei fețe, în aceleași condițiuni ca și unghiul B, vom ave un nou solid, care va ave: $3 \times 8 = 24$ fețe. (Fig. 85).

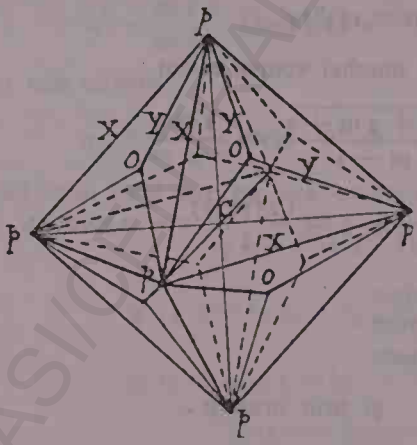


Fig. 85

Prin o construcție analoagă cu acea ce am făcut la Trapezoedru, putem arăta că: fețele solidului sunt niște triunghiuri isoscele, reunite câte trei în jurul extremităților axelor ternare, așa că solidul va ave forma unui Octaedru a cărui fețe sunt acoperite cu câte o piramidă cu trei fețe triunghiulare, de unde numele de: *Octaedru piramidat* sau *Trioctaedru* ce se dă acestui solid. El are: 36 muchi de două specii: 12 muchi mai lungi X, reunind extremitățile axelor cvaternare și corespunzind

cu muchile Octaedrului; şi 24 muchi mai scurte y, reunite câte trei în jurul extremităţilor axelor ternare, pe care le unesc cu extremităţile axelor cvaternare. Unghiurile solide în număr de 14 sunt de două specii: 6 unghiuri p formate de 4 muchi lungi, alternând cu 4 muchi scurte, în jurul extremităţilor axelor cvaternare; şi 8 unghiuri O formate de câte trei muchi scurte, reunite în jurul extremităţilor axelor ternare.

Am văzut că notaţiunea Trioctaedruiui este:

$$a^{\frac{1}{m}} \quad \text{cu} \quad m > 1.$$

Trioctaedrele cele mai frecvente sunt:

$$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{2}}\ b^{1} \quad \text{sau} \quad a^{\frac{1}{2}}$$

$$b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{3}}\ b' \quad \text{sau} \quad a^{\frac{1}{3}}$$

$$b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{2}} \quad \text{sau} \quad a^{\frac{2}{3}} \quad \text{sau} \quad b^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} b^{1}.$$

Observăm că Trioctaedrul va fi mai obtuz când $\frac{1}{m}$ va fi mai mare, adică m mai mic. Aşa: $a^{\frac{1}{2}}$ va fi mai obtuz de cât $a^{\frac{1}{3}}$.

— După Naumann, raportul parametric corespunzetor acestui solid, pe care-l numeşte *Triakisoctaedru* este: a : a : ma, de unde notaţiunea: $m\ O$.

Pentru a obţine acest solid, va trebui să aplicăm planuri care să atingă două axe la extremitate şi pe a treia la o distanţă $m > 1$. (Fig. 86). Aşa: planul aplicat pe extremităţile x şi y şi tăind pe z la o distanţă m, se întâlneşte cu planul aplicat pe extremităţile x şi z, după dreapta xp şi cu planul aplicat pe z şi y, după dreapta ym. Aceste două intersecţii se taie în punctul d aşa că, faţa aplicată pe x şi y şi atingând pe z la distanţa m va fi: xyd.—In mod analog se obţin şi celelalte feţe: yzd şi zxd, care sunt, după cum se poate uşor vede, nişte tri-

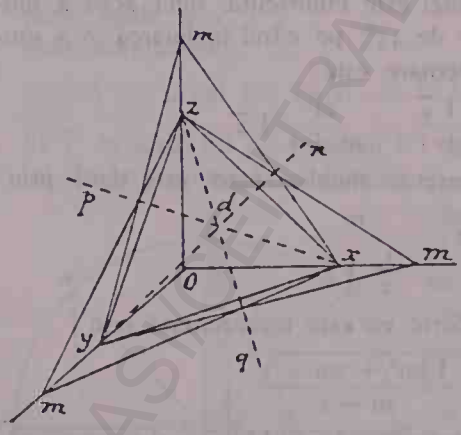


Fig 86

unghiuri isoscele, căci avem : xd = yd = zd ca fiind $\frac{2}{3}$ din medianele triunghiului xyz.

— Expresiunea diverselor elemente a Triakisoctaedrului este :

Axa binară fiind acea a Octaedrului va ave ca valoare :

$$a' = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Axa ternară are ca valoare absolută :

$$a'' = \frac{m\sqrt{3}}{2m+1}$$

Şi în raport cu acea a Octaedrului ea este :

$$a_1'' = \frac{3m}{2m+1}$$

Inclinaţia α a feţelor, în raport cu axa cvaternară este dată prin relaţia :

$$tg\,\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$$

In raport cu *ma* ea este :

$$tg\,\alpha' = \frac{1}{2m}\sqrt{2}.$$

Inclinaţia muchelor lungi este cunoscută, fiind acea a muchilor Octaedrului : ea este de 45^0, pe când inclinarea β a muchilor scurte pe axele cvaternare este :

$$tg\,\beta = \frac{m\sqrt{2}}{m+1} = \frac{m}{m+1}\sqrt{2}.$$

Valoarea diedrului corespunzetor muchei mari este dată prin :

$$tg\,\gamma = \frac{m}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

Iar pentru muchile scurte ea este reprezentată prin :

$$tg\,\gamma' = \frac{\sqrt{3m^2+2m+1}}{m-1}$$

— Pentru a ave notaţiunea după Miller, observăm că faţa aplicată pe x şi y este reprezentată prin raportul parametric : a : a : ma, de unde : $\frac{1}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{m}$ sau notaţiunea (m m 1).

— Proiecţia polilor feţelor Trioctaedrului se obţine astfeliu :

Să considerăm Trioctaedrul înscris în sfera de proiecţie; vedem că prin muchile mici trec planurile de 45^0 între axe, şi prin urmare polii feţelor cuprinse între x, y, z se vor găsi pe cercurile mari de 45^0 la intersecţia lor cu alte cercuri mari. Să considerăm faţa zxT' a cărei pol P' se găseşte la intersecţia cercului $yP'\bar{y}$ de 45^0 între z şi x, cu cercul $xP'\bar{x}$, a cărui proiecţiune noi o căutăm ⟨Fig. 87⟩ Diedrul zx fiind măsurat, să presupunem că am găsit : $121^0 3' 57''$; atunci unghiul normalelor la feţele ce formează acest diedru va fi suplimentul de $38^0 56' 3''$ şi fiind că planul xz împarte în două părţi egale unghiul normalelor,

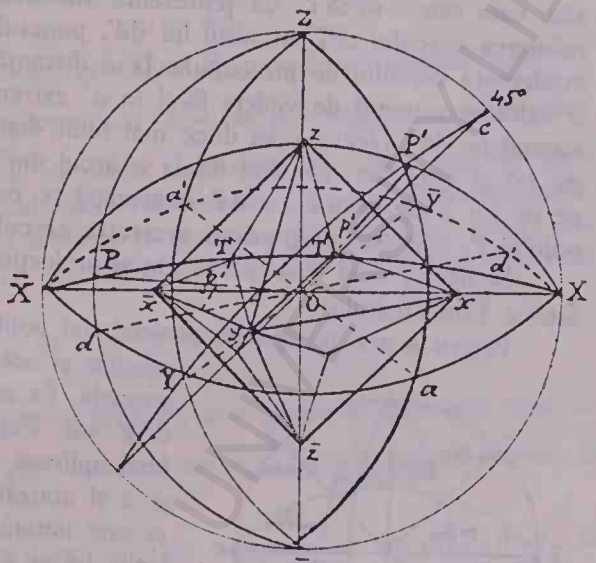


Fig. 87

rezultă că, arcul P'c va fi : $\frac{38^0 56' 3''}{2} = 19^0 28' 1''$. Rabatând cercul $yP'\bar{y}$ în jurul lui $y\bar{y}$, punctul P' va cădea pe circonferinţa cercului de proiecţiune la o distanţă de : $19^0 28' 1''$ de la x către y, pe când punctul de vedere va veni în $\bar{x}$. Vom ave dar a face construcţia următoare : ⟨Fig. 88⟩ ducem mai întâi cercul $yb\bar{y}$, proiecţia cercului de 45^0 între x şi z, apoi plecând de la x luăm : $xm = 19^0 28' 1''$ şi, unind m cu $\bar{x}$, dreapta $m\bar{x}$ va întâlni pe $y\bar{y}$ în punctul b', prin x, b', $\bar{x}$ facem să treacă un cerc mare, care întâlneşte cercul $yb\bar{y}$, de 45^0, în punctul p', care va fi proiecţia polului P'.

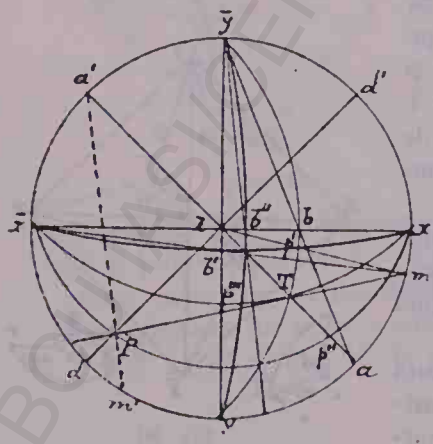


Fig. 88

Pentru a ave proiecţia polului feţei $y\bar{x}T$ observăm că normala Op atinge sfera în punctul P. la intersecţia cercului $zP\bar{z}$ de 45° între $\bar{x}$ şi y, cu cercul $xP\bar{x}$, a cărui proiecţiune se caută. Fiind că diedrul $\bar{x}y$ este de $121^0 3' 57''$, jumătatea suplimentului său, care este : $19^0 28' 1''$ va reprezenta valoarea arcului Pd. Prin rabaterea cercului $zP\bar{z}$ în jurul lui dd', punctul P vine pe circonferenţa cercului de proiecţiune la o distanţă de $19^0 28' 1$ de la *d* cătră y, punctul de vedere fiind în *a'* extremitatea diametrului normal pe dd'. Deci : vom duce mai întâi diametrele dd' şi aa' de 45^0 şi vom lua, plecând de la *d* arcul $dm' = 19^0 28' 1''$; unind pe m' cu a' se obţine cu dd' intersecţia *p*, care este proiecţia polului P, căci $xp\bar{x}$ reprezintă proiecţia cercului $xP\bar{x}$.

In acelaş mod vom putea obţine proiecţiunea polilor tuturor feţelor Trioctaedrului.

Pentru a ave poziţiunea proiecţiunei polilor tuturor feţelor, precum şi notaţiunea lor, vom proceda ca şi la Trapezoedru. ⟨Fig. 89⟩ Faţa proiectată în *p'* fiind aplicată pe extremităţile *x* şi *z* şi atingând pe *y* la distanţa *m* este notată ⟨m 1 m⟩, deci valorile lui *m* corespund axelor atinse la extremitate. Atunci pentru celelalte feţe putem să scriem : ⟨mm1⟩ pentru *p* şi ⟨1mm⟩ pentru p''. Remarcăm că polii feţelor

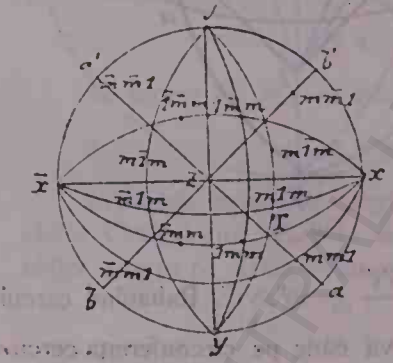


Fig. 89

Trioctaedrului sunt proiectaţi, ca şi polii feţelor Trapezoedrului, pe cercurile de 45^0, nu între T şi extremităţile axelor, dar între T şi punctele unde diametrele de 45^0 ating cele trei cercuri principale : $x\,z\,\bar{x}$, $y\,z\,\bar{y}$, şi $x\,y\,\bar{x}$.

— Pentru calculul elementelor Trioctaedrului prin metoda trigonometrică, avem a considera două cazuri :

1. Se dă diedrul A şi se caută valoare lui *m*. ⟨Fig. 90⟩. Considerăm triunghiul sferic ⟨1⟩ drept-

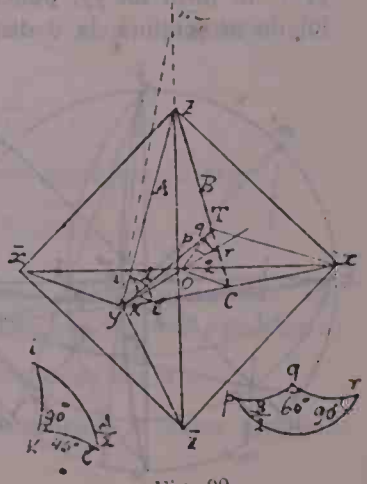


Fig. 90

unghic în k, în care cunoaştem: unghiul $l = \frac{A}{2}$ şi laturea $kl = 45^0$; putem calcula pe i k prin formula:

$$tgik = tgl \sin 45^0$$

Cunoscând valoarea lui *ik* în triunghiul mOy avem:

$$m = tgik.$$

2. Dacă cunoaştem diedrul B, atunci în triunghiul sferic ⟨z⟩ dreptunghic în *r*, avem: $p = \frac{B}{2}$ iar *q* reprezintă unghiul planului axelor binare cu planul axelor ternare, care este de 60^0; putem atunci să calculăm valoarea lui *qr*, care reprezintă înclinarea feţei pe axa ternară. In fine, în triunghiul OcT avem: unghiul $TOc = 35^0 15'$ unghiul axei ternare cu axa binară: deci vom putea pune:

$$qr + 35^0 15' + OcT = 180^0$$

de unde: $$OcT = 180^0 - \langle qr + 35^0 15' \rangle$$

care reprezintă unghiul feţei cu axa binară şi care este egal cu $\frac{A}{2}$; deci putem găsi valoarea lui A şi prin urmare a reveni la cazul precedent.

— Pentru a face calculele servindu-ne de proiecţiuni, să

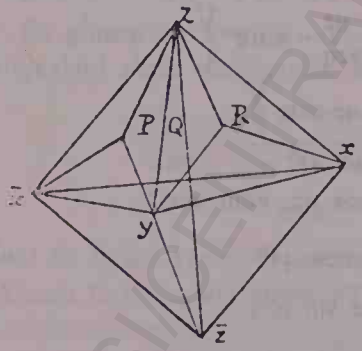


Fig. 91

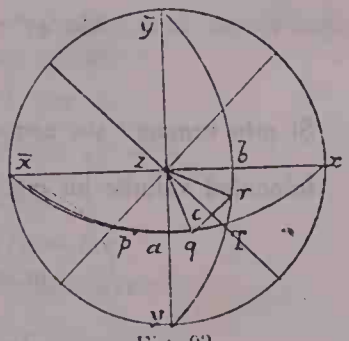


Fig. 92

considerăm trei feţe adiacente ale trioctaedrului, P, Q, R, ⟨Fig. 91⟩ şi proiecţiunele p, q, r a polilor lor. ⟨Fig. 92⟩. Avem două cazuri, după cum se dă, diedrul X sau Y şi se caută a determina valoarea lui *m* în notaţiunea unei feţe, a lui Q de exemplu.

I. Se dă diedrul Y. In proiecţiune avem:

$$pq = 180^0 - Y \quad \text{deci:} \quad aq = 90^0 - \frac{Y}{2}$$

Notaţiunea feţei Q fiind ⟨1mm⟩, ecvaţia feţei va fi:

$$\frac{\cos\ q\ x}{1} = \frac{\cos\ q\ y}{m} = \frac{\cos\ q\ z}{m} \quad \text{de unde:}$$

$$m = \frac{\cos\ q\ y}{\cos\ q\ x} = \frac{\cos\ q\ z}{\cos\ q\ x}$$

Trebue deci să determinăm valorile lui cos qz şi cos q x.

In triunghiul sferic qzx avem:

$$\cos\ q\ x = \sin\ qz\ \cos\ q\ x\ z = \sin\ q\ z\ \sin\ a\ z\ q.$$

Apoi în triunghiul aqz dreptunghic, avem:

$$\cos\ qz = \sin\ \frac{Y}{2}\ \cos\ 45^0$$

Apoi: $\cos\ azq = tg\ 45^0\ \cotg\ qz = \cotg\ pz$ . . . ⟨1⟩

Şi: $\sin\ 45^0 = \cotg\ azq\ \cotg\ aq = \cotg\ azq\ \cotg\ \frac{Y}{2}$ . . ⟨2⟩

Insă egalitatea ⟨1⟩ ne dă:

$$\cotg\ azq = \frac{\cos\ azq}{\sin\ azq} = \frac{\cotg\ qz}{\sin\ azq.}$$

Inlocuind în ⟨2⟩ avem:

$$\sin\ 45^0 = \frac{\cotg\ qz}{\sin\ azq} \cdot \cotg\ \frac{Y}{2}$$

Şi prin urmare: $\sin\ azq = \dfrac{\cotg\ qz\ \cotg\ \frac{Y}{2}}{\sin\ 45^0}$

Inlocuind valorile lui cos qx şi cos qz, vom ave:

$$m = \frac{\sin\ \frac{Y}{2}\ \cos\ 45^0}{\sin\ qz\ \sin\ azq}$$

sau: $$m = \frac{\sin\ \frac{Y}{2}\ \cos\ 45^0 .\ \cos\ 45^0}{\sin\ qz\ \cotg\ qz\ \cotg\ \frac{Y}{2}}$$

Inlocuind valoarea găsită pentru cos qz avem:

$$m = \frac{\cos\ qz\ \cos\ 45^0}{\sin\ qz\ \cotg\ qz\ \cotg\ \frac{Y}{2}} = \frac{\cotg\ qz\ \cos\ 45^0\ tg\ \frac{Y}{2}}{\cotg\ qz} \quad \text{sau}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$m = \cos 45^0 \operatorname{tg} \frac{Y}{2}$$

Exemplu. Se dă: $Y = 141^0 4'$ Deci: $\frac{Y}{2} = 70^0 32'$.

Vom ave: $\lg m = \lg \cos 45^0 + \lg \operatorname{tg} 70^0 32'$.

$\lg \cos 45^0 = 9.84949.$

$\lg \operatorname{tg} 70^0 32' = 0.45165.$

$\lg m = 0.30114.$ Deci: $m = 2.$

II. Se dă diedrul X. Avem: $qr = 180^0 - X$ şi $qc = 90 - \frac{X}{2}$.

Observăm că în T se projectează polul feţei Octaedrului, a cărui ecvaţie este:

$$\cos Tx = \cos Ty = \cos Tz.$$

In triunghiul sferic Tzy avem:

$$\cos Ty = \sin Tz \cos Tzy = \sin Ty \cos 45^0$$

Deci: $\frac{\cos Ty}{\sin Ty} = \cos 45^0$ sau:

$$\operatorname{cotg} Ty = \operatorname{cotg} Tx = \operatorname{cotg} Tz = \cos 45^0.$$

Deci: $Tz = Tx = Ty = 54^0 44'8$

Să punem: $\alpha = Tx = Ty = Tz = 54^0 44'8'$ şi să considerăm triunghiul sferic dreptunghic aTy, care ne dă

$$\cos aTy = \sin ayT \cos ay.$$

Sau: $\cos aTy = \sin 45^0 \cos 45^0 = \frac{1}{2}$.

Deci: $aTy = 60^0$

Insă în figură găsim de asemenea: $qTc = 60^0$.

Atunci în triunghiul sferic qTc dreptunghic avem:

$$\cos \frac{X}{2} = \sin qT \sin 60^0$$

Deci: $$\sin qT = \frac{\cos \frac{X}{2}}{\sin 60^0}$$

In triunghiul dreptunghic aTz avem:

$$\cos Tz = \cos aT \cos az = \cos aT \cos 45^0$$

BCU IAŞI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

De unde : $\cos aT = \frac{\cos Tz}{\cos 45^0} = \frac{\cos \alpha}{\cos 45^0}$. Deci :

$$aT = 35^0 15' 52''.$$

Insă în figură avem : $aT = 90^0 - Tx = 90^0 - \alpha$.

Apoi : $qx = qT + Tx = qT + \alpha$ şi $aq = aT + Tq = \langle 90^0 - \alpha \rangle - Tq$.

Dacă considerăm atunci triunghiul sferic dreptunghic aqz, avem :

$$\cos qz = \cos az \cos aq = \cos 45^0 \cos \langle 90^0 - \alpha - qT \rangle$$

sau : $$\cos qz = \cos 45^0 \sin \langle \alpha + qT \rangle.$$

Cunoscând deci valorile lui cos qz şi cos qx, avem :

$$m = \frac{\cos qz}{\cos qx} = \frac{\cos 45^0 \sin \langle \alpha + qT \rangle}{\cos \langle qT + \alpha \rangle}$$

sau în definitiv : $m = \cos 45^0 \operatorname{tg} \langle \alpha + qT \rangle$.

Exemplu. Se dă : $X = 142^0 9'$. Deci $\frac{X}{2} = 71^0 4' 30''$.

Avem : $\alpha = 54^0 44' 8''$.

Atunci : $\lg \sin qT = \lg \cos \frac{X}{2} - \lg \sin 60^0$

$$\lg \cos 71^0 4' 30'' = 9.51098.$$
$$- \lg \sin 60^0 = 9.93753$$
$$\lg \sin qT = 9.57345$$

Deci : $qT = 21^0 59' 40''$

Şi fiindcă : $\alpha = 54^0 44' 8''$

$$qT + \alpha = 76^0 43' 48''$$

Atunci : $\lg m = \lg \cos 45^0 + \lg \operatorname{tg} \langle qT + \alpha \rangle$.

$$\lg \cos 45^0 = 9.84948.$$
$$\lg \operatorname{tg} \langle qT + \alpha \rangle = 0.62709.$$
$$\lg m = 0.47657.$$

Deci : $m = 3$.

— Pentru transformarea notaţiunelor Trioctaedrului avem următoarele formule generale :

$$b^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{q}{p}} = \frac{p}{q} O = a : \frac{q}{p} a : \frac{q}{p} a = \langle ppq \rangle.$$

Pentru principalele Trioctaedre vom ave :

$$b^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}}\, b^{1} = a^{\frac{1}{2}} = 2O = a : \frac{1}{2}\, a : \frac{1}{2}\, a = \langle 221 \rangle.$$

$$b^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{1}{3}}\, b^{1} = a^{\frac{1}{3}} = 3O = a : \frac{1}{3}\, a : \frac{1}{3}\, a = \langle 331 \rangle'$$

$$b^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{2}{3}}\, b^{1} = a^{\frac{2}{3}} \quad \frac{3}{2}O = a : \frac{2}{3}\, a : \frac{2}{3}\, a = \langle 332 \rangle.$$

Să calculăm elementele unui Trioctaedru cunoscut :

De ex : $\langle 331 \rangle$.

Axa ternară va fi : $a'' = \frac{m\sqrt{3}}{2m+1} = \frac{3\sqrt{3}}{7} = 0.7436.$

Inclinarea unei fețe către axa cvaternară este :

$$\operatorname{tg} \alpha \quad \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ și atunci :}$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg 3 - \frac{\lg 10}{2} \text{ sau :}$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha \quad 0.47712 - 0.50000 = 9.97712.$$

Deci : $\alpha = 43^0 29' 30''$ și atunci unghiul a două fețe opuse va fi

$$2\alpha = 86^0 59'.$$

Inclinarea unei muchi scurte pe axa cvaternară este dată prin ecvația : $\operatorname{tg} \beta = \frac{m}{m+1}\sqrt{2}$. In cazul nostru :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}\sqrt{2} = 1.065.$$

Deci : $\lg \operatorname{tg} \beta = \lg 1.065 = 0.02734.$

atunci : $\beta = 46^0 48' 10''$

și deci : $2\beta = 93^0 36' 20''$.

Valoarea diedrului corespunzetor muchii mari este dată prin formula : $\operatorname{tg} \gamma \quad \frac{m}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 4.24.$

Deci $\lg \operatorname{tg} \gamma = \lg 4.24 = 0.62736.$ sau $\gamma = 76^0 43' 40''$

Prin urmare : $2\gamma = 153^0 27' 20''$.

Pentru muchea scurtă avem :

$$\operatorname{tg} \gamma' = \frac{\sqrt{3m^2+2m+1}}{m-1} \quad \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

Deci: $\lg \operatorname{tg} \gamma' = \frac{\lg 34}{2} - \lg 2.$

$$\lg \operatorname{tg} \gamma' = 0.76573$$
$$- 0.30103$$
$$\lg \operatorname{tg} \gamma' = 0.46470$$

Atunci urmează că: $\gamma' = 71^0 4'$ şi prin urmare:

$$2\gamma' = 142^0 8'.$$

Scalenoedrul sau Hexoctaedrul

Pentru a deduce din cub acest solid, se înlocuesc unghiurile solide prin feţe care ieu pe cele trei muchi distanţe deosebite. In acest caz, care este cel mai general, fiecare muche este înlocuită prin două feţe şi unghiul va fi înlocuit prin urmare prin şase feţe. (Fig 93). Aşa: planul Amn interceptând distanţele: AB = 1, Bm = $\frac{1}{m}$, Bn = $\frac{1}{n}$, cere un alt plan Aqr care ia: AB = 1, Bq = $\frac{1}{n}$, Br = $\frac{1}{m}$ Ambele planuri se taie după dreapta Aa, iar muchea AB va fi înlocuită prin feţele Ama şi Ara. Procedând

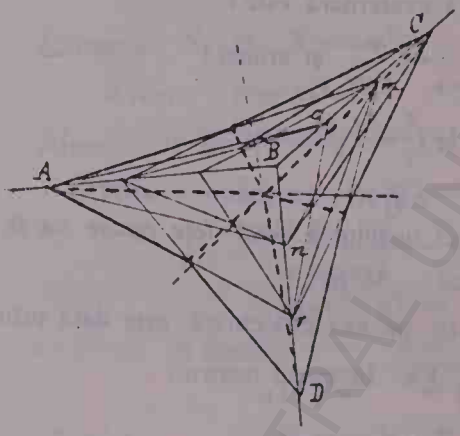


Fig. 93

în acelaş mod pentru celelalte muchi, vom înlocui unghiul solid prin un vârf cu 6 feţe. Inlocuind în acelaş mod celelalte unghiuri ale cubului, şi înaintând cu truncheturile până ce facem să dispară feţele cubului, se va obţine în solid care va ave: $6 \times 8 = 48$ feţe şi care se numeşte *Hexoctaedru* (Fig. 94). Feţele acestui solid vor fi de sigur nişte triunghiuri scalene, dreptunghice,

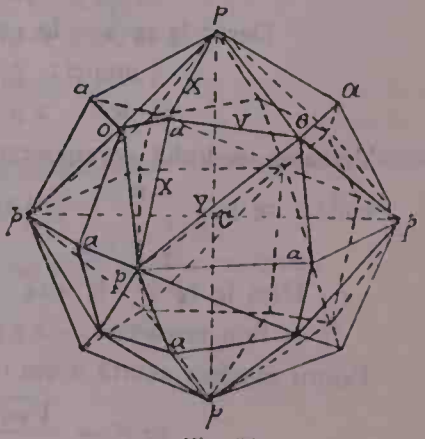


Fig. 94

din care cauză s'a dat acestui solid şi numele de *Scalenoedru.* Celelalte elemente sunt: 72 muchi de 3 feluri: 24 muchi mai lungi V, 24 muchi mijlocii X şi 24 muchi mai scurte V. Muchile lungi reunesc extremităţile axelor ternare cu extremităţile axelor cvaternare: muchile mijlocii unesc extremităţile axelor binare cu a axelor cvaternare, iar muchile scurte unesc extremităţile axelor binare cu ale axelor ternare. Unghiurile solide în număr de 26 sunt asemenea de 3 specii: 6 unghiuri *p*, corespunzind extremităţilor axelor cvaternare, formate alternativ de muchi mari şi mijlocii; apoi 8 unghiuri *o* corespunzetoare extremităţilor axelor ternare, formate de muchi alternativ lungi şi scurte: şi 12 unghiuri *a* corespunzetoare extremităţilor axelor binare, formate de muchi mijlocii şi scurte.

Notaţiunea feţelor acestui solid va fi:

$$b^1\ b^{\frac{1}{m}}\ b^{\frac{1}{n}}.$$

Scalenoedrele cele mai frecvente sunt:

$$b^1\ b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{2}{3}}$$

$$b^1\ b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}$$

$$b^1\ b^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{5}}\ \text{etc.}$$

— După Naumann acest solid se numeşte: *Hexakisoctaedru* şi corespunde raportului parametric: a : ma : na.

Pentru a-l obţine se aplică pe axe feţe care să atingă o axă la extremitate şi pe celelalte două la distanţe *m* şi *n* deosebite între ele şi ≥ 1. (Fig. 95).

Astfeliu: Să aplicăm feţele $xn_1\ m_2$ şi $xn_2\ m_1$ pe extremitatea lui x, luând pe celelalte axe distanţe m şi n: ele se vor întâlni după intersecţia *ax.* Deasemenea: feţele ynm_2 şi ymn_2 se tae după

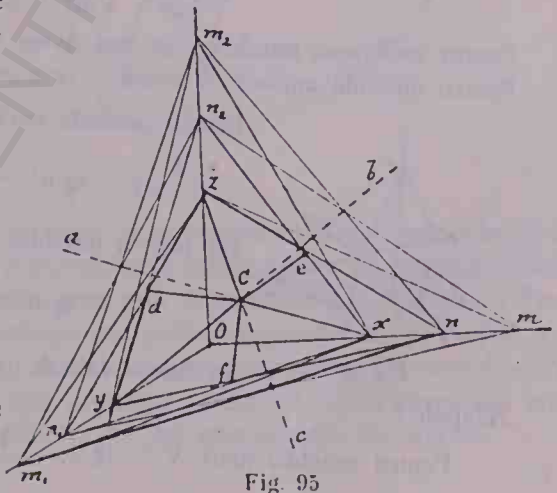


Fig. 95

dreapta *yb*, care se întâlneşte cu xa, în punctul C. In fine znm$_1$ şi zn$_1$m se tae după *zc*, care trece de asemenea prin punctul C. Apoi: mzn$_1$ şi myn$_2$ dau intersecţia *md*, m$_1$n$_2$x şi m$_1$nz dau pe *m*$_1$*e* pe când m$_2$yn şi m$_2$xn dau pe *m*$_2$*f*. Se obţine în definitiv conturul xfydze, care conţine şase feţe triunghiulare dispuse în jurul punctului C.

Raportul parametric fiind: a : na : ma, notaţiunea solidului va fi: *mOn*.

— Pentru a obţine notaţiunea după Miller luăm faţa notată în parametri: a : na : ma, de unde avem: $\frac{1}{1} : \frac{1}{n} : \frac{1}{m}$ sau ⟨mn, m, n⟩. Deci: notaţiunea feţei aplicată pe x, atingând pe y la *n* şi pe *z* la *m* va fi notată: ⟨mn m n⟩. In acelaş mod vom ave notaţiunele tuturor celorlalte feţe a solidului.

— Să determinăm acum elementele scalenoedrului.

Axele binare care unesc centrul cu unghiurile *a* au ca valoare:

$$a' = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}.$$

Pentru axele ternare avem:

$$a'' = \frac{mn\sqrt{3}}{mn+m+n}.$$

Inclinaţia feţelor pe axele ternare este dată prin:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

Pentru inclinarea muchelor pe axe avem: ⟨Fig. 96⟩.

Pentru muchile mijlocii X avem: $\operatorname{tg} \alpha = n$.

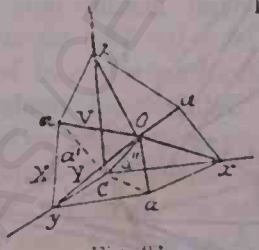


Fig. 96

Pentru muchile mici V avem:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{n\sqrt{2}}{mn+m}.$$

Iar pentru muchile mari Y:

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{mn\sqrt{2}}{m+n}.$$

In fine: valorile diedrelor sunt date prin relaţiele:

Pentru muchile mari Y: $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{(m+n)^2+2m^2n^2}}{m-n}$.

Pentru muchile mijlocii X: $\operatorname{tg} \beta' = \frac{m\sqrt{n^2+1}}{n.}$

şi pentru muchile scurte V: $\operatorname{tg} \beta'' = \frac{\sqrt{m^2+(n+1)^2+2n^2}}{m\,l\,2.}$

Pentru a ave proiecţia polilor feţelor scalenoedrului, vom proceda ca şi în cazul celorlalte solide examinate mai înainte. Să considerăm un scalenoedru înscris în sfera de proiecţiune, (Fig. 97), observăm că, în jurul punctului T, care este extremitatea axei ternare, se găsesc 6 feţe şi că, planurile cercurilor de 45^0 între x şi y, x şi z, y şi z, trec prin muchile mari, aşa că,

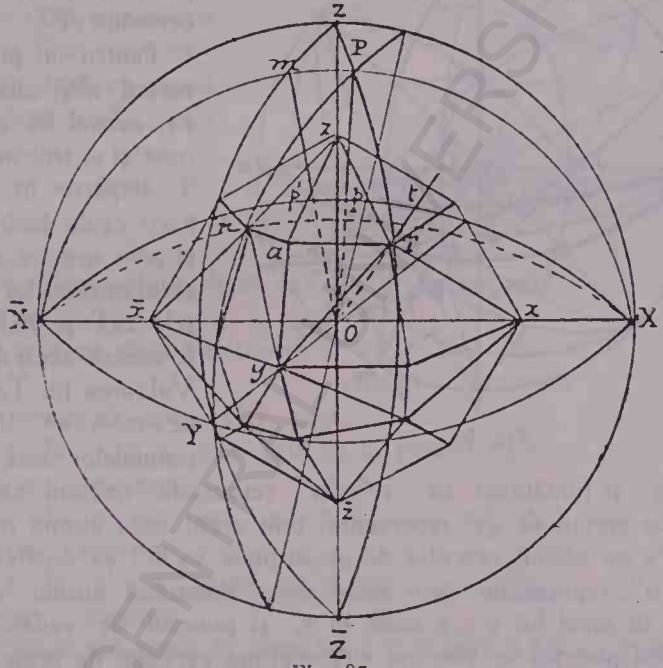


Fig. 97

polii feţelor vor fi cuprinşi în triunghiurile formate pe planul de proiecţiune, de către proiecţiunele axelor $x\bar{x}$, $y\bar{y}$, $z\bar{z}$ şi proiecţiunele cercurilor de 45^0 care trec prin T polul feţei Octaedrului. Pentru a determina proiecţiunele polilor acestor feţe, să luăm mai întâi faţa zaT. Polul seu P, se găseşte la intersecţia cercului yPy şi a cercului $xP\bar{x}$, deci proiecţia sa se va afla la intersecţia proiecţiilor acestor două cercuri. Să presupunem că avem:

za = 148°59′58″; suplimentul său: 31°0′2″ reprezintă unghiul normalelor la feţele ce formează diedrul *za*. Insă planul zyz̄, care trece prin za împarte în două părţi egale unghiul normalelor; jumătatea acestui unghiu care este: 15°30′1″ reprezintă inclinarea cercului zPz̄ cu cercul zyz̄, care este măsurată prin arcul mP. Rabatând deci cercul xPx̄ în jurul lui x x̄, punctul *m* vine în y, şi P la o distanţă de 15°30′1″ către x, pe când punctul de vedere este în ȳ. Deci (Fig. 98), plecând de la y spre x, luăm arcul yt = 15°30′1″, unim t cu ȳ, ceia ce dă cu x x̄ intersecţia b′. Prin y, b′, ȳ facem să treacă un cerc mare, care reprezintă projecţiunea cercului yPȳ.

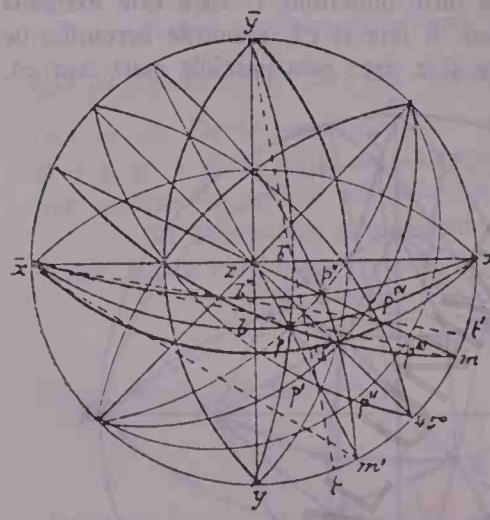


Fig. 98

Pentru a projecta cercul xPx̄, observăm că, cercul de 45° între z şi y, trecând prin T împarte în două părţi egale diedrul Ta, şi prin urmare şi unghiul normalelor la feţele zaT şi yaT care formează acest diedru. Valoarea lui Ta fiind de: 158°12′58″, unghiul normalelor este de: 21°47′2″ şi jumătatea sa: 10°53′31″ reprezintă unghiul cercului xPx cu cercul de 45° reprezentat prin arcul *mm′*; atunci unghiul lui xPx cu planul cercului de projecţiune va fi: 45°+10°53′31″ = 55°53′31″, reprezentat prin arcul *mm′y*. Rabatând atunci cercul ymzȳ în jurul lui y ȳ, z cade în x, şi punctul de vedere în x, pe când punctul *m* vine pe circonferinţa cercului de projecţiune la o distanţă de 55°53′31″ de la y spre x. Deci, plecând de la y spre x luăm arcul ym = 55°53′31″, unim m cu x̄, ceia ce dă cu y ȳ intersecţia *b*; prin x, b, x̄ facem să treacă un cerc mare, care reprezintă projecţia lui xPx̄ şi care întâlneşte cercul ybȳ în punctul *p* care reprezintă projecţia polului *P*. In acelaş mod vom obţine projecţia polilor celorlalte feţe.

Pentru a ave notaţia projecţiunei polilor celor 6 feţe ce se găsesc în jurul lui T, vom întrebuinţa următoarea metodă, acea

a rotaţiei în jurul lui T. (Fig. 99). Faţa zaT a cărui pol a fost proiectat, este aplicată pe extremitatea lui z, atinge pe x la distanţa *m* şi pe y la distanţa *n*: deci notaţia sa va fi: ma: na: a sau: (n, m, mn). Dacă facem ca această faţă să se învârtească în jurul lui T, în sens invers acelor unui ceasornic, făcând să ocupe pe rând poziţiunea celorlalte feţe, vom observa că, dacă ea ocupă poziţia feţei yaT, z s'a schimbat în y, aşa că notaţiunea sa devine x z y, sau scriindu-le în ordinea normală

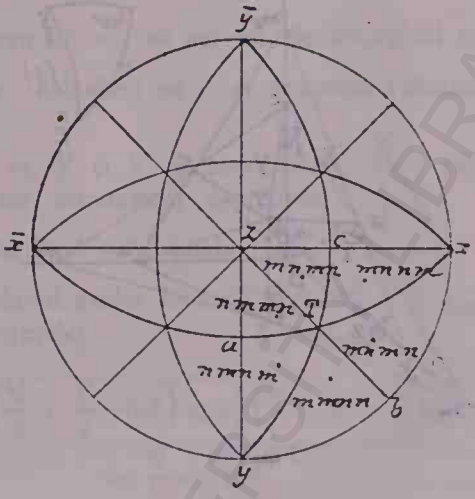


Fig. 99

n m mn

avem:

x y z, deci notaţia feţei yaT va fi: (n mn m).
n mn m

Vom ave pe rând notaţiunele: z y x în x y z
n mn m m nm n

sau (m mn n) pentru ybT, apoi:

y x z în x y z sau (mn m n) pentru xTb,
m mn n nm m n

x z y în x y z sau (mn n m) „ xTc.
mn m n mn n m

z y x în x y z sau (m n mn) „ zTc.
mn n m m n mn

Făcând rabaterea în jurul lui x x̄ şi apoi a lui y ȳ vom obţine notaţiunele celorlalte feţe a solidului.

— Pentru a calcula trigonometric valorile lui *m* şi *n* observăm că ne trebue să cunoaştem cel puţin două unghiuri. (Fig. 100). Vom ave deci a examina trei cazuri:

1. Cunoaştem diedrele X şi V. In triunghiul sferic dreptunghic (1) cunoaştem pe $\frac{X}{2}$ şi $\frac{V}{2}$, putem calcula pe *v* cu ajutorul formulei:

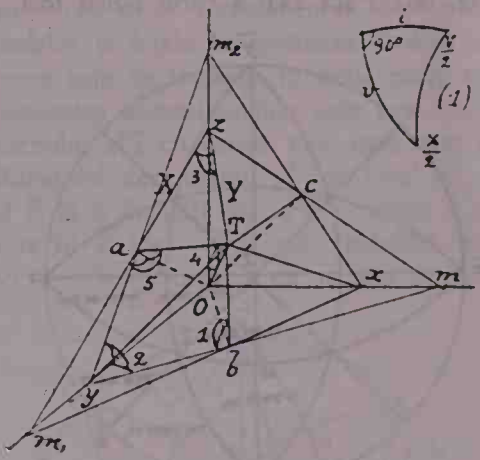


Fig. 100

$$\cos v = \frac{\cos \frac{V}{2}}{\sin \frac{X}{2}}$$

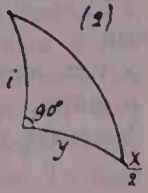
Unghiul v ne arată inclinația muchei X pe axa binară Ob, atunci în triunghiul yOb avem: unghiul $O = 45^0$ și unghiul în *b*, cunoscut. Atunci unghiul y, care reprezintă inclinația muchei spre axa cvaternară va fi:

$$y = 180^0 - (O + b) = 180^0 - 45^0 - b. = 135^0 - b.$$

și atunci în triunghiul Oyn avem:

$$n = tg\ y.$$

Pentru a ave valoarea lui *m* considerăm triunghiul sferic (2) dreptunghic, în care cunoaștem: *i* $\frac{X}{2}$ și y. Vom pute calcula pe *i* prin formula:



$$tg\ i = tg\ \frac{X}{2} \sin y.$$

Cunoscând deci pe *i*, în triunghiul m_2Oy avem:

$$m = tg\ i.$$

2. Cunoaștem pe X și Y; considerăm triunghiul sferic (3) în care cunoaștem: $\frac{X}{2}$, $\frac{Y}{2}$, iar al treilea unghiu este de 45^0,

atunci, pentru a ave pe *i*, care reprezintă inclinarea lui X pe axa cvaternară, ne servim de formula:

$$\cos \frac{i}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}\left(\frac{Y}{2} + 45^0 - \frac{X}{2}\right) \cos \frac{1}{2}\left(\frac{Y}{2} - \frac{X}{2} - 45^0\right)}{\sin 45^0 \sin \frac{X}{2}}}.$$

Cunoscând pe *i*, în triunghiul zOu avem: $n = tg\ i.$

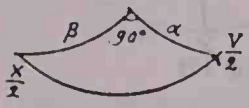
Pentru a găsi valoarea lui *m*, ne servim de triunghiul ⟨2⟩ căci cunoaştem pe $\frac{X}{2}$ şi *y*, calculăm pe *i*, şi deducem valoarea lui *m*.

3. Când cunoaştem pe Y şi V ne servim de triunghiul sferic ⟨4⟩ în care cunoaştem unghiurile $\frac{V}{2}$ şi $\frac{Y}{2}$ al treilea unghiu fiind 60°, unghiul planului axelor ternare pe planul axelor binare. Calculăm pe i cu ajutorul formulei :

$$\cos\frac{i}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}\left(\frac{V}{2}+\frac{Y}{2}-60^0\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{2}+60^0-\frac{V}{2}\right)}{\sin\frac{V}{2}\sin 60^0}}$$

ceia ce ne dă inclinarea muchei V pe axa ternară. Insă în triunghiul OaT, unghiul $aOT = 35^0 15$, unghiul axei binare cu axa ternară. Deci vom ave :

$$\alpha = \angle OaT = 180^0 - 35^0 15' - i = 144^0 45' - i.$$



(5) care reprezintă inclinarea muchei V pe axa binară. Atunci în triunghiul sferic dreptunghic ⟨5⟩ cunoaştem pe $\frac{V}{2}$ şi α şi calculăm $\frac{X}{2}$ prin formula :

$$\cos\frac{X}{2} = \cos\alpha \sin\frac{V}{2}$$

Cunoscând valoarea lui X, ne găsim în cazul precedent.

Cân V = Y ⟨pentru a : $\frac{3}{2}$ a : 3 a⟩ atunci avem *Scalenoedrul isogonal*; în acest caz nu mai e nevoe de a căuta separat pe *m* şi *n*, căci între ei există relaţia :

$$n = \frac{2m}{m+1} \quad \text{deci :} \quad m = \frac{n}{2-n}.$$

— Prin metoda proiecţiilor, putem conduce calculele precum urmează :

Să considerăm cele trei feţe a scalenoedrului :

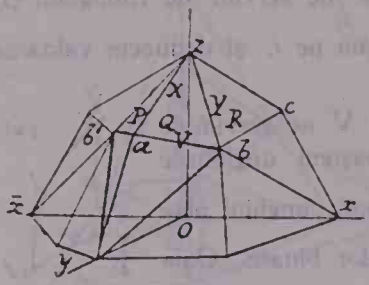


Fig. 101

P ⟨zab'⟩, Q (zab) şi R ⟨zbc⟩. (Fig. 101).

Ne propunem a determina valoarea indicilor feţei Q, cunoscând valoarea a 2 diedre. Vom ave deci trei cazuri, după natura diedrelor care sunt date.

I. Presupunem ca se dau X şi Y, să construim proiecţia polilor feţelor P, Q, R; fie p, q, r aceste-

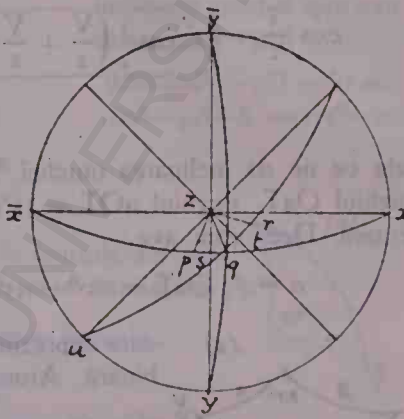


Fig. 102

proiecţiuni. (Fig. 102). Arcul p q care măsura unghiul normalelor la feţele zab' şi zab, este deci suplimentul diedrului X. Vom ave deci:

$$pq = 180^0 - X \quad \text{şi deci:}$$

$$sq = 90^0 - \frac{X}{2}$$

De asemenea: $qr = 180^0 - Y$

deci: $qt = 90^0 - \frac{Y}{2}$.

Observăm că: *zu* este perpendicular pe *zt* ca proiecţiuni a cercurilor de 45^0. Atunci avem:

$$\bar{x}u = uy = 45^0, \quad qu = tu - tq = 90^0 - 90^0 + \frac{Y}{2} = \frac{Y}{2}$$

De asemenea: $\bar{x}q = xs + sq = 90^0 + 90^0 - \frac{X}{2} = 180^0 - \frac{X}{2}$.

Ecvaţia feţei este: $m \cos qx = n \cos qy - \cos qz$.

Deci: $m = \frac{\cos qz}{\cos qx}$ şi $n = \frac{\cos qz}{\cos qy}$.

Trebue dar să căutăm valorile lui: qx, qy şi qz, în funcţiune de X şi Y.

Să considerăm triunghiul sferic q x u care ne dă:

$$\cos qu = \cos \bar{x}u \cos q\bar{x} + \sin \bar{x}u \sin q\bar{x} \cos u\bar{x}q.$$

Insă în triunghiul sferic $\bar{x}sy$ avem:

$$\bar{x}s = \bar{x}y = 90^0. \quad \text{Deci } s\bar{x}y = u\bar{x}q = Sy.$$

Inlocuind aceste valori în egalitatea precedentă avem :

$$\cos \frac{Y}{2} = - \cos 45^0 \cos \frac{X}{2} + \sin 45^0 \sin \frac{X}{2} \cos Sy.$$

De unde : $$\cos Sy = \frac{\cos \frac{Y}{2}}{\sin 45^0 \sin \frac{X}{2}} + \operatorname{cotg} \frac{X}{2}.$$

In triunghiul sferic dreptunghic zsq avem :

$$\cos qz = \cos sz \sin \frac{X}{2}$$

In triunghiul sferic dreptunghic qsy avem :

$$\cos qy = \cos Sy \sin \frac{X}{2}$$

Divizând aceste două din urmă egalităţi vom ave :

$$\frac{\cos qz}{\cos qy} = \frac{\cos Sz \sin \frac{X}{2}}{\cos Sy \sin \frac{X}{2}} = \frac{\cos Sz}{\cos Sy} = \frac{\sin Sy}{\cos Sy} = \operatorname{tg} Sy.$$

Atunci valoarea lui n devine :

$$n = \frac{\cos qz}{\cos qy} = \operatorname{tg} Sy.$$

Insă : $qx = 90^0 - qs = 90^0 - 90^0 + \frac{X}{2} = \frac{X}{2}$ sau : $\cos qx = \cos \frac{X}{2}$

Găsim dar pentru valoarea lui *m* :

$$m = \frac{\cos qz}{\cos qx} = \frac{\cos Sz \sin \frac{X}{2}}{\cos \frac{X}{2}} = \sin Sy \operatorname{tg} \frac{X}{2}.$$

Exemplu. Fie : $X = 148^0 59' 58''$ şi $Y = 158^0 12' 58''$.

Vom ave : $\frac{X}{2} = 74^0 29' 59''$ şi $\frac{Y}{2} = 79^0 6' 29'$.

Vom întrebuinţa formulele : $n = \operatorname{tg} Sy$ şi $m = \sin Sy \operatorname{tg} \frac{X}{2}$.

Cu : $$\cos Sy = \frac{\cos \frac{Y}{2}}{\sin 45^0 \sin \frac{X}{2}} + \operatorname{cotg} \frac{X}{2}.$$

Vom ave: $\lg \cos \frac{Y}{2} = 9.27635$

$\operatorname{cotg} \sin 45^0 \quad 0.15052$

$\operatorname{cotg} \sin \frac{X}{2} = 0.01609$

9.44296

Atunci: $\dfrac{\cos \frac{Y}{2}}{\sin 45^0 \sin \frac{X}{2}} = 0.27731.$

Insă: $\lg \operatorname{cotg} \frac{X}{2} = 9.44298.$

Deci: $\operatorname{cotg} \frac{X}{2} = 0.27732.$

Atunci: $\cos sy = 0.55463.$

Deci: $\lg \cos sy = \lg. 0.55463 \quad 9.74400.$

$Sy = 56^0 18' 50''$

Atunci: $n = \operatorname{tg} Sy = 1.502.$ sau: $n = \frac{3}{2}.$

De asemenea: $\lg m = \lg \sin Sy + \lg \operatorname{tg} \frac{X}{2}.$

$\lg \sin Sy = 9.92017$

$\lg \operatorname{tg} \frac{X}{2} = 0.55701$

$\lg m = 0.47718$ Deci: $m = 3.$

Notaţiunea feţei fiind: n, m, mn. vom ave:

$\frac{3}{2} : 3 : \frac{9}{2}$ sau 6 : 12 : 18. sau (123).

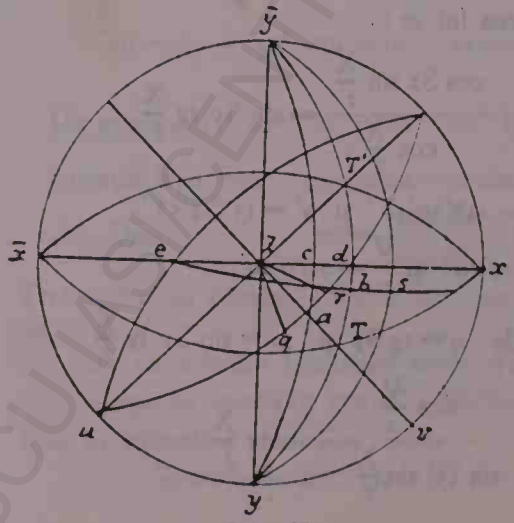


Fig. 103

II. Se dă X şi V; considerăm feţele: zab, zbc, şi xbc, a căror proiecţiuni sunt: q, r, s. Ne propunem de a determina indicii feţei R. (Fig. 103).

Ecvaţia feţei este: $\cos rz = m \cos ry = n \cos rx.$

De unde: $m = \dfrac{\cos rz}{\cos ry}$

şi $n = \dfrac{\cos rz}{\cos rx}.$

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

Observăm mai întâi că, punctele *d, e, u, v* reprezintă proiecțiele polilor fețelor dodecaedrului romboidal, și că punctul *e* se găsește la 90° de cercul de zonă ydv. Atunci figura ne dă:

$$rc = 90^0 - \frac{X}{2} \text{ și } rs = 180^0 - v.$$

Deci: $$rb = 90^0 - \frac{V}{2}$$

In triunghiul sferic dreptunghic rby în care avem:

$$ry = 90^0 - rc = \frac{X}{2}$$

există următoarea relațiune:

$$\sin rb = \sin ry \sin by \text{ sau } \cos \frac{V}{2} = \sin \frac{X}{2} \sin cd.$$

Deci: $$\sin cd = \frac{\cos \frac{V}{2}}{\sin \frac{X}{2}}.$$

Insă: $zc = 45^0 - cd$. Și în triunghiul sferic dreptunghic rzc, avem:

$$\cos rz = \sin \frac{X}{2} \cos cz = \sin \frac{X}{2} \cos \langle 45^0 - cd \rangle.$$

și $$\cos rzc = \cot g\, rz\, tg\, cz$$

In triunghiul sferic rzx, avem:

$$\cos rx = \sin rz \cos rzc. \text{ sau:}$$

$$\cos rx = \sin rz \cot g\, rz\, tg\, cz = \cos rz\, tg\, cz.$$

Și înlocuind valoarea lui cos rz găsită mai sus rezultă:

$$\cos rx = \sin \frac{X}{2} \cos cz \frac{\sin cz}{\cos cz} = \sin \frac{X}{2} \sin \langle 45^0 - cd \rangle.$$

Deci: $$m = \frac{\sin \frac{X}{2} \cos \langle 45 - cd \rangle}{\cos \frac{X}{2}} = tg \frac{X}{2} \cos \langle 45^0 - cd \rangle.$$

și $$n = \frac{\sin \frac{X}{2} \cos \langle 45^0 - cd \rangle}{\sin \frac{X}{2} \sin \langle 45^0 - cd \rangle} = \cot g \langle 45^0 - cd \rangle.$$

BCU IAȘI FONDUL UNIVERSITY LIBRARY

Exemplu. Avem : $\frac{X}{2} = 78^0 41' 29''$ şi $\frac{V}{2} = 82^0 1' 57''$

Avem : $\lg \cos \frac{V}{2} = 9.14175$

$\operatorname{cotg} \sin \frac{X}{2} = 0.00852.$

$\lg \sin cd = 9.15027.$ Deci : $cd = 8^0 7' 30''.$

Atunci : $zc = 45^0 - cd = 36^0 52' 30''$

$\lg n = \lg \operatorname{cotg} zc = 0.12485$

Deci : $n = 1.333$ sau $n = \frac{4}{3}.$

Pentru valoarea lui *m* găsim :

$$\lg \operatorname{tg} \frac{X}{2} = 0.69903$$

$$\lg \cos \langle 45^0 - cd \rangle = 9.90306$$

$\lg m = 0.60209$ Deci . . $m = 4.$

Notaţiunea feţei find : $\langle m\ n\ mn \rangle$ avem : $4 : \frac{4}{3} : \frac{16}{3}$

sau : $\langle 314 \rangle.$

III. Se dă V şi V. Ecvaţia feţei R fiind :

$$\cos rz = n \cos rx - m \cos ry$$

Urmează că : $m = \frac{\cos r'}{\cos ry}$ şi $n = \frac{\cos rz}{\cos rx}.$

In figura precedentă avem :

$qr = 180^0 - V$ sau $ar = 90^0 - \frac{V}{2}.$

şi : $rs = 180^0 - V$ sau $rb = 90^0 - \frac{V}{2}.$

De asemenea : $ru = ua + ar = 90^0 + ar. = 180^0 - \frac{V}{2}.$

$$er = eb - rb = 90^0 - 90^0 + \frac{V}{2} = \frac{V}{2}.$$

Atunci în triunghiul sferic dreptunghic $eu\bar{x}$, avem :

$$\cos eu = \cos e\bar{x} . \cos \bar{x}u = \cos^2 45^0.$$

Deci : $\cos eu = \frac{1}{2}$ şi $\sin eu = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

De asemenea în triunghiul sferic *ure* avem:

$$\cos er = \cos eu \cdot \cos ur + \sin eu \sin ur \cos eur.$$

De unde: $\cos eur = \dfrac{\cos er - \cos eu \cos ur}{\sin eu \sin ur.}$

Inlocuind valorile lui cos er, cos eu şi cos ur avem:

$$\cos eur = \frac{\cos \frac{V}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{V}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{V}{2}} = \frac{2 \cos \frac{V}{2} + \cos \frac{V}{2}}{\sqrt{3} \sin \frac{V}{2}}$$

Apoi: în triunghiul sferic euz în care: uz 90^0 avem:

$$\cos ez = \sin eu \cos euz \quad \text{de unde:}$$

$$\cos euz = \frac{\cos ez}{\sin eu} = \frac{\cos 45^0}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 \cos 45^0}{\sqrt{3}.}$$

Deci: euz $35^0 15' 52''$

Şi atunci: az zua eua — euz = eua — $35^0 15' 52$

De asemenea: în triunghiul sferic dreptunghic rza, avem:

$$\cos rz = \cos ar \cos az = \cos ar \sin \frac{V}{2}$$

şi $$\operatorname{cotg} azr = \sin az \operatorname{tg} \frac{V}{2}$$

In fine: în triunghiul sferic ryz avem:

$$\cos ry = \sin rz \cos \langle 45^0 + azr \rangle$$

Şi din triunghiul rzx deducem:

$$\cos rx = \sin rz \cos \langle 45^0 - azr \rangle.$$

sau: $$\cos rx = \sin rz \sin \langle 45^0 + azr \rangle.$$

Inlocuind aceste valori, găsim:

$$m = \frac{\cos rz}{\cos ry} = \frac{\cos rz}{\sin rz \cos \langle 45^0 + azr \rangle} = \frac{\operatorname{cotg} rz.}{\cos \langle 45^0 + azr \rangle}.$$

şi $$n = \frac{\cos rz}{\cos rx} = \frac{\cos rz}{\sin rz \sin \langle 45^0 + azr \rangle} = \frac{\operatorname{cotg} rz}{\sin \langle 45^0 + azr \rangle}$$

Exemplu. Se dă: $\frac{V}{2}$ $73^0 53' 59''$ şi $\frac{V}{2} = 82^0 1' 57''$

Avem: $\lg \cos \frac{V}{2} = 9.44297$ Deci: $\cos \frac{V}{2} = 0.31730$

$\lg \cos \frac{V}{2} = 9.14190$ Deci: $\cos \frac{V}{2} 0.13865$ şi

$$2 \cos \frac{V}{2} = 0.27731.$$

Atunci: $\cos \frac{V}{2} + 2 \cos \frac{V}{2} = 0.59461$

Deci: $\lg 0.59461 = 9.77423$

$\operatorname{cotg} \sin \frac{V}{2} = 0.01738$

$\operatorname{cotg} \frac{3}{2} = 9.76144$

$\lg \cos eur = 9.55305$

$eur = 69^0 3' 50''.$

Atunci: $az = eur - 35^0 15' 52'' = 33^0 47' 58''$

Deci: $\lg \cos az = 9.91959.$

$\lg \sin \frac{V}{2} = 9.98262.$

$\lg \cos rz = 9.90221.$

Atunci: $rz = 37^0 1' 30''.$

De asemenea vom ave:

$\lg \sin az = 9.74531.$

$\lg \operatorname{tg} \frac{V}{2} = 0.53965$

$\lg \operatorname{cotg} azr = 0.28496$

Deci: $azr = 27^0 25' 20''.$

Atunci: $m = \frac{\operatorname{cotg} rz}{\cos (45^0 + azr)} = \frac{\operatorname{cotg} rz}{\cos 72^0 25' 20''}.$

şi $n = \frac{\operatorname{cotg} rz}{\sin 72^0 25' 20''}$ şi atunci:

$\lg m = \lg \operatorname{cotg} rz = 0,12249.$

$- \lg \cos 72^0 25' 20'' = 9.50077$

$\lg m = 0.62172$ şi prin urmare: $m = 4.$

BCU IAŞI CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY

Apoi : $\lg n = \lg \operatorname{cotg} r\% = 0.12249$

$$-\lg \sin 72^0 25' 20'' = 9.97923$$

$$\lg n = 0.14326 \quad \text{Deci :} \quad n = \frac{4}{3}.$$

Deci : notaţia feţei va fi : ⟨314⟩.

Formulele generale pentru transformarea notaţiunelor sunt :

$$b^{\frac{1}{r}} b^{\frac{1}{q}} b^{\frac{1}{p}} = a : \frac{r}{q} a : \frac{r}{p} a = \frac{p}{r} O \frac{p}{q} = \langle pqr \rangle.$$

Pentru principalele scalenoedre vom ave :

$$b^3 b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} = a : \frac{1}{3} a : \frac{2}{3} a = \frac{3}{2} O \frac{1}{2} = \langle 362 \rangle.$$

$$b^1 b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} = a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{3} a = 3 O \frac{3}{2} = \langle 321 \rangle.$$

$$b^1 b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{5}} = a : \frac{1}{4} a : \frac{1}{5} a = 5 O \frac{5}{4} = \langle 541 \rangle.$$

Pentru a calcula elementele unui scalenoedru cunoscut, să luăm solidul : $a : \frac{3}{2} a : 3a$ sau ⟨321⟩

Avem : $m = 3$, $n = \frac{3}{2}$. Atunci :

$$a' = \frac{3}{5} \sqrt{2} = 0.8487 \quad a'' = \frac{mn \sqrt{3}}{mn + m + n} = \frac{1}{2} \sqrt{3} = 0.867.$$

Inclinarea unei feţe pe axa cvaternară este :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}. \quad \text{Deci :} \quad \lg \operatorname{tg} \alpha = \lg 4.5 - \lg \frac{11.25}{2}.$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = 0.65321.$$

$$-0.52557.$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = 0.12764 \quad \text{Deci :} \quad \alpha = 53^0 13'$$

Inclinarea muchei mijlocii X este : $\operatorname{tg} \alpha = n$. Deci :

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg n = \lg 1.5.$$

$$\text{Atunci :} \quad \alpha = 54^0 42'.$$

Pentru muchile mici avem :

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$tg\,\alpha' = \frac{n\sqrt{2}}{mn+m} \quad \text{Deci : } lg\,tg\,\alpha' = lg\,1.5. + \frac{lg\,2}{2} - lg\,7.5.$$

sau : $lg\,tg\,\alpha' = 0.17609$

$$+ \quad 0.15051$$

$$0.32660$$

$$- \quad 0.87506$$

$$lg\,tg\,\alpha' = 9.45154 \quad \text{Deci : } \alpha' = 15^0 47'.$$

Pentru muchile mari vom ave :

$$tg\,\alpha'' = \frac{mn\sqrt{2}}{m+n} = \frac{4.5}{4.5}\sqrt{2} \quad \text{Deci}$$

$$lg\,tg\,\alpha'' = \frac{lg\,2}{2} = 0.15051 \quad \text{Prin urmare : } \alpha'' = 54^0 44'.$$

Valorile diedrelor sunt :

Pentru muchile mari : $tg\,\beta = \frac{\sqrt{(m+n)^2 + 2m^2 n^2}}{m-n.}$ sau

$$tg\,\beta = \frac{\sqrt{60.75}}{1.5.} \quad \text{Prin urmare : } lg\,tg\,\beta = \frac{lg\,60.75}{2} - lg\,1.5. \quad \text{sau}$$

$$lg\,tg\,\beta = 0.89177$$

$$- \quad 0.17609$$

$$lg\,tg\,\beta = 0.71568 \quad \text{Deci : } \beta = 79^0 6'.$$

Prin urmare : $2\beta = 158^0 12'$.

Pentru muchile mijlocii avem :

$$tg\,\beta' = \frac{m\sqrt{n^2+1}}{n} = 2\sqrt{3.25}. \quad \text{sau :}$$

$$lg\,tg\,\beta' = lg\,2 + \frac{lg\,3.25}{2} = 0.30103$$

$$+ \quad 0.25594$$

$$lg\,tg\,\beta' = 0.55697. \quad \text{Deci : } \beta' = 149^0.$$

In fine pentru muchile mici avem :

$$tg\,\beta'' = \frac{\sqrt{m^2 + (n+1)^2 + 2n^2}}{m\sqrt{2}.} = \frac{\sqrt{19.75}}{3\sqrt{2}.}$$

de unde : $\beta'' = 158^0 13'$.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B. Modificări pe muchi.

Modificările pe muchi sunt de două feluri:
1. Simetrice şi 2. Disimetrice.

Modificări simetrice. Avem un singur caz, care ne conduce la:

Dodecaedrul romboidal.

Pentru a obţine acest solid după Levy, vom înlocui muchile cubului prin o faţă paralelă cu muchea, luând pe celelalte două distanţe egale. (Fig. 104). Astfeliu cele trei planuri MNPQ, RSTQ şi RNUV înlocuind cele trei muchi ce formează unghiul B, determină intersecţiele Rr, Qq, Nn care se tae în punctul O, aşa că muchile rămân înlocuite prin feţele MqOnP, SqOrT şi UnOrV. Dacă facem aceleaşi modificaţiuni pe cele 12 muchi ale cubului, şi înaintăm că trunchieturile până ce dispar feţele cubului, obţinem un solid cu 12 feţe, care sunt romburi egale, solid care se numeşte: *Dodecaedru romboidal.* (Fig. 105). El are toate muchile egale; iar cele 14 unghiuri solide sunt de două feluri: 6 unghiuri *p* formate de 4 muchi, corespunzetoare cu extremităţile axelor cvaternare, şi 8 unghiuri O formate de câte 3 muchi, corespunzând extremităţilor axelor ternare.

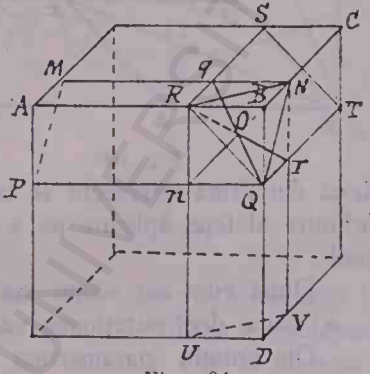


Fig. 104

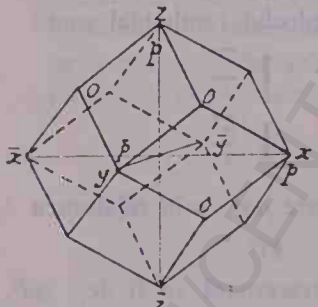


Fig. 105

Notaţiunea feţelor este: $b^{\frac{1}{\infty}}\ b^{\frac{1}{m}}\ b^{\frac{1}{\overline{m}}} = b^1$

— După Naumann, dodecaedrul romboidal corespunde raportului parametric: a : a : ∞ a, şi se obţine aplicând planuri, care ating două axe la extremităţi şi sunt paralele cu a treia axă. (Fig 106). Aşa: planul paralel cu axa de *z*, şi trecând prin extremităţile axelor *x* şi *y*, şi planul paralel cu *x* şi trecând prin *y* şi *z*, au ca intersecţie dreapta *ym*; aceste două planuri vor întâlni planul ce

trece prin x şi z paralel cu y, după dreptele : *xu* şi *zp*. Aceste trei intersecţii au ca punct comun pe C. Pentru a poate avea conturnul complect al feţei ce trece prin x şi z, va trebui să determinăm intersecţiele cu planurile ce trec prin $\bar{y}$. Aşa : cu planul ce trece prin x şi $\bar{y}$ paralel cu z avem intersecţia *xr* şi cu planul ce trece prin z şi $\bar{y}$, paralel cu x, avem intersecţia *zs*. Aceste două din urmă intersecţii se tae în punctul B, aşa că, conturul definitiv al feţei aplicate pe x şi z va fi : zCxB, care este un romb.

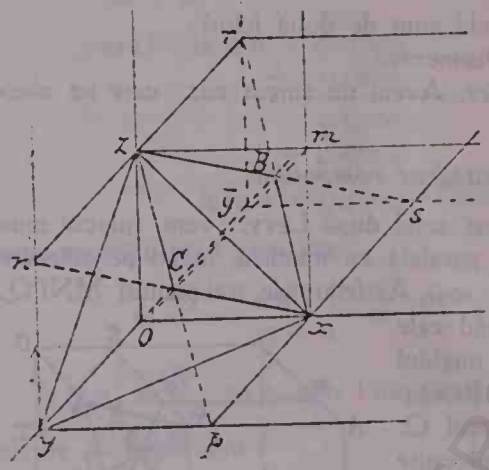


Fig. 106

După cum am văzut mai sus, raportul parametric este : a : a : ∞ a, deci notaţiunea va fi : ∞ O.

Din notaţia parametrică de mai sus deducem notaţia în indici : $\frac{1}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{\infty}$ sau ⟨110⟩.

Elementele cristalografice ale dodecaedrului romboidal sunt :

Axa binară : $a' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

„ ternară $a'' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\sqrt{\frac{3}{4}}$

Unghiul unei feţe cu axa cvaternară este dat prin relaţiunea :

$$tg\,\alpha = 1. \quad \text{Deci : } \alpha = 45^0.$$

Atunci : unghiul a două feţe pe axa cvaternară va fi de : 90^0.

Inclinarea unei muchi pe axa cvaternară este :

$$tg\,\alpha' = \sqrt{2}. \quad \text{Deci : } \alpha' = 54^0 44' 8''$$

Deci : două muchi fac, pe axa cvaternară un unghiu de :

$$109^0 21' 16''$$

Valoarea diedrului corespunzetor unei muchi este dată prin :

$$tg\,\alpha'' = \sqrt{3} \quad \text{Deci : } \alpha'' = 60^0.$$

Şi deci valoarea unghiului întreg va fi: $z\alpha = 120^0$.

— Dacă înscriem dodecaedrul romboidal în sfera de proiecţie ⟨Fig. 107⟩ observăm că feţele sunt dispuse în două moduri: 4 feţe laterale sunt astfeliu dispuse în cât normalele la aceste feţe se găsesc în planul de proiecţiune şi polii lor se proiectează pe circonferenţa cercului de proiecţiune şi la 45° între proiecţiunele planului cercului fundamental şi a planului cercului normal la acesta. Celelalte 8 feţe sunt dispuse în grupe de câte 4 în jurul extremităţilor axei $z\bar{z}$; deci polii lor se vor găsi pe cercurile mari $z\,x\,z\,\bar{x}$ şi $z\,y\,\bar{z}\,\bar{y}$. Dacă considerăm faţa aplicată pe z şi y paralel cu xx, normala Ob la această faţă, atinge sfera de proiecţie în punctul B, care se găseşte la intersecţia cercului $z\,y\,\bar{z}\,\bar{y}$ cu cercul $xB\bar{x}$. Pentru a găsi proiecţia cercului $xB\bar{x}$, observăm că, unghiul feţelor aplicate pe z şi y şi pe $\bar{z}$ şi y fiind de 90°, unghiul normalelor la aceste feţe este asemenea de 90° şi prin urmare unghiul yOB este de 45°. Rabatând cercul $zBy\bar{z}$ în jurul lui $y\,\bar{y}$, punctul de vedere vine în x şi punctul B în *a* la 45° de la y spre $\bar{x}$. Deci: ⟨Fig. 108⟩ unind punctul de vedere x, cu *a* obţinem în *b* intersecţia cu $y\,\bar{y}$ şi cercul $xb\bar{x}$ va fi proiecţia cercului $xB\bar{x}$, deci proiecţia polului B va fi în *b*.

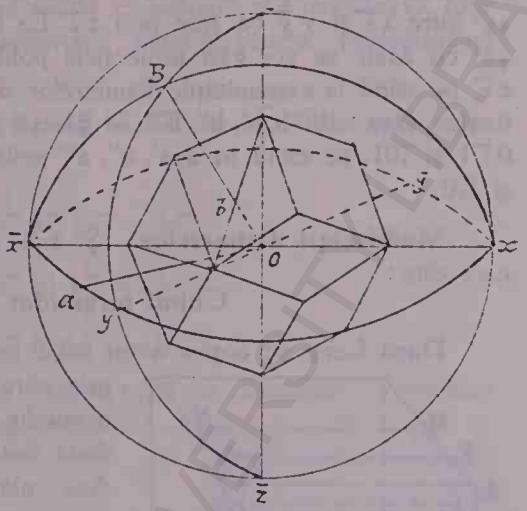


Fig. 107

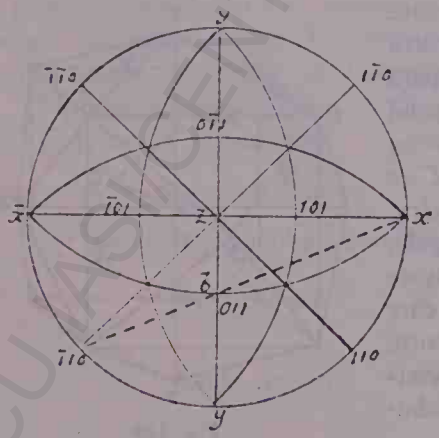


Fig. 108

Pentru a ave deci proiecţiele polilor feţelor dodecaedrului romboidal, este

de ajuns de a construi proiecţiele cercurilor mari de 45° între z şi extremităţile axelor $x\,\bar{x}$ şi $y\,\bar{y}$, precum şi a cercurilor mari de 45° între $x\,\bar{x}$ şi $y\,\bar{y}$ ce trec prin $z\,\bar{z}$. La intersecţia cercurilor de 45° cu axele se vor găsi proiecţiele polilor feţelor din jurul axei $z\,\bar{z}$, pe când la extremităţile diametrelor de 45°, polii feţelor verticale. Aşa: în b, b', b'', b''' se găsesc polii feţelor: 011, 101, $0\bar{1}1$ şi $\bar{1}01$, pe când în a, a', a'', a''' polii feţelor: $\bar{1}10$, 110, $1\bar{1}0$ şi $\bar{1}\bar{1}0$.

Modificaţii disimetrice. Şi aici avem o singură formă care este:

Cubul piramidat.

După Levy, se obţine acest solid înlocuind muchile cubului prin câte două feţe paralele cu o muche şi luând pe celelalte două distanţe deosebite. (Fig. 109) Aşa: planul MNPQ, paralel cu muchea AB, interceptează pe muchea BC distanţa $BN = b^{\frac{1}{m}}$ şi pe BD distanţa $BQ = b^{\frac{1}{m}}$. Simetria binară a muchei, cere un alt plan RSTU, care interceptează segmentele:

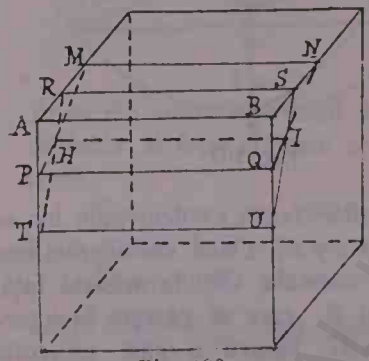


Fig. 109

$BS = b^{\frac{1}{m}}$ şi $BU = b^{\frac{1}{m}}$. Ambele planuri se întretae după HI şi avem muchea AB înlocuită prin feţele: HIMN şi HITU. Dacă facem această modificare pe toate muchile cubului şi înaintăm către centru pentru a face să dispară feţele cubului, se obţine un solid care va ave: 2×12 sau $4 \times 6 = 24$ feţe, şi care se numeşte: *Cub piramidat* sau *Tetrahexaedru*. (Fig. 110). El are 24 feţe egale, care sunt nişte triunghiuri isoscele, apoi 36 de muchi, care sunt de 2 feluri: 24 muchi scurte Y, reunite câte 4 în jurul extremităţilor axelor cvaternare a cubu-

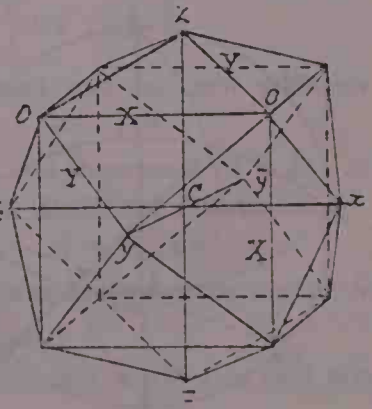


Fig. 110

lui şi 12 muchi lungi X, corespunzetoare cu muchile cubului: şi 14 unghiuri solide de două feluri: 6 unghiuri formate de câte 4 muchi scurte, corespunzind axelor cvaternare, şi 8 unghiuri O, formate din câte 6 muchi alternativ lungi şi scurte, corespunzind axelor ternare.

Simbolul feţelor va fi: $b^{\frac{1}{o}}\ b^{\frac{1}{m}}\ b^{\frac{1}{m}}$ sau $b^{\frac{m}{n}}$. Cele mai frecvente tetrahexaedre sunt:

$$b^{\frac{1}{o}}\ b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{3}{2}}.$$

$$b^{\frac{1}{o}}\ b^{1}\ b^{\frac{1}{2}} = b^{2}.$$

$$b^{\frac{1}{o}}\ b^{1}\ b^{\frac{1}{3}} = b^{3}.$$

— După Naumann acest solid se numeşte: *Tetrakishexaedru* şi corespunde raportului parametric:

a : ma : ∞ a.

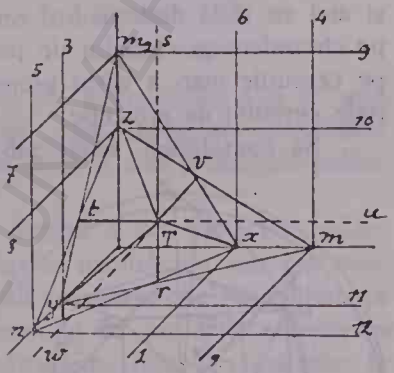


Fig. 111

şi se obţine aplicând feţe care ating o axă la extremitate, paralele cu a doua şi atingând pe a treia la o distanţă *m* mai mare de cât 1 (Fig. 111). Astfeliu: feţele 6xm, 5 şi 3ym 4 paralele cu axa de z au intersecţia *rs* paralelă cu Oz, pe când feţele paralele cu Ox vor ave intersecţia *tu* şi acele paralele cu Oy, intersecţia *vw*. Aceste trei intersecţii vor ave un punct comun T, unde se întrunesc şi celelalte intersecţii a feţelor, aşa că în jurul punctului T se vor reuni 6 feţe.

Notaţia solidului va fi: ∞ *Om*.

Din notaţia în parametri: a : mà : ∞ a, deducem notaţia în indici: $\frac{1}{1} : \frac{1}{m} : \frac{1}{\infty}$ sau: ⟨m 10⟩.

— Elementele cubului piramidat sunt:

Axele binare: $a' \quad \frac{m\sqrt{2}}{m+1}$.

Axele ternare: $a'' \quad \frac{m\sqrt{3}}{m+1}$.

Inclinarea feţelor pe axa cvaternară e dată prin relaţiunea :

$$tg\ \alpha = m.$$

Inclinarea muchilor mici pe axa cvaternară este :

$$tg\ \alpha' = m\ \sqrt{2}.$$

Unghiul diedru corespunzind muchilor mari este dat prin :

$$tg\ \beta = \frac{m+1}{m-1}.$$

Iar pentru muchile mici prin relaţia :

$$tg\ \beta' = \sqrt{2m^2+1}.$$

— Pentru a obţine proiecţia polilor feţelor Tetrahexaedrului, să considerăm sofidul înscris în sfera de proiecţie. Observăm că şi aici ca şi la dodecaedrul romboidal, sunt feţe a căror poli cad pe circonferenţa cercului de proiecţie, pe când altele au polii lor pe cercurile mari a căror proiecţii sunt axele $x\bar{x}$ şi $y\bar{y}$, diametrele cercului de proiecţie.

Să considerăm feţele zab şi yab ; polii lor se găsesc pe cercul mare $zy\bar{z}$, la intersecţia cu cele două cercuri mari : $xA\bar{x}$ şi $xB\bar{x}$. (Fig. 112). Fiindcă proiecţia cercului $zy\bar{z}$ este diametrul corespunzetor, ne rămâne să determinăm proiecţiele celorlalte două cercuri. Observăm că, normalele scoborâte din centru pe cele două feţe, le ating în punctele c şi c' şi formează între ele unghiul α, care este suplimentul diedrului corespunzetor muchei ab ; fie $143^0 7' 58''$ valoarea diedrului : suplimentul său va fi : $36^0 52' 2''$ care e valoarea lui α. Dacă unghiul Sys' este : $126^0 52' 2''$, rezultă că : Oys $63^0 26' 1''$, şi fiind că triunghiul Oyc' este dreptunghic în c', rezultă că c'Oy este complimentul lui Oys şi are ca valoare : $26^0 33' 59''$. Avem dar :

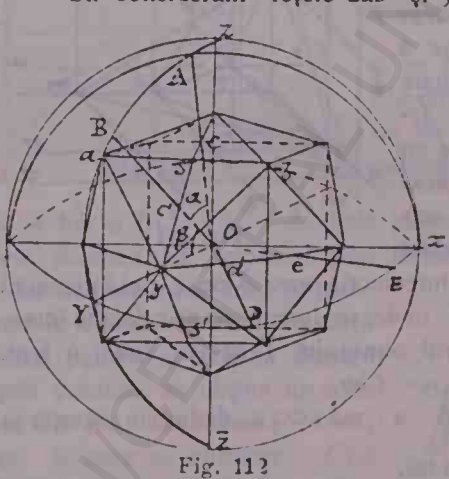


Fig. 112

$$\alpha = 36^0 52' 2''\ \text{şi}\ \beta = 26^0 33' 59''.$$

Atunci cercurile $xA\bar{x}$ şi $xB\bar{x}$ sunt inclinate către cercul de proiecţie de: $\alpha+\beta=63^0 36' 1''$. şi: $\beta = 26^0 33' 59''$. Pentru a face proiecţia lor, rabatem cercul $yBA\bar{y}$ în jurul lui $y\bar{y}$, aşa că z cade în $\bar{x}$, pe când punctul de vedere vine în x. ⟨Fig. 113⟩. Atunci B şi A cad pe circonferenţa cercului de proiecţiune în punctele a' şi b' aşa că:

$$yb' = \beta = 26^0 33' 59'' \text{ şi}$$
$$ya' = \beta + \alpha = 63^0 36' 1''.$$

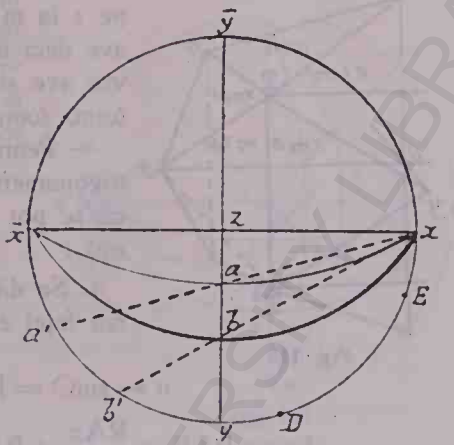


Fig. 113

E de ajuns dar de a uni pe x cu a' şi b' şi vom obţine cu $y\bar{y}$ intersecţiele a şi b: prin $x, \bar{x}$, a, şi b facem să treacă cercuri, care reprezintă proiecţiele cercurilor $xA\bar{x}$ şi $xB\bar{x}$, iar punctele a şi b sunt proiecţiele polilor feţelor zab şi yab.

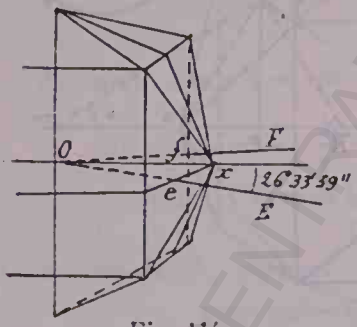


Fig. 114

Pentru a ave proiecţia polilor feţelor paralele cu axa $z\bar{z}$, care poli se găsesc pe circonferenţa cercului de proiecţie, observăm că aceste feţe se întâlnesc la extremităţile axelor $x\bar{x}$ şi $y\bar{y}$. ⟨Fig. 114⟩. Unghiul acestor două feţe fiind $126^0 52' 2''$, unghiul normalelor va fi: suplimentul: $53^0 7' 58''$ şi fiind că feţele sunt egal inclinate în raport cu planul care trece prin $z\bar{z}$ şi axa laterală corespondentă, acest plan divide în două părţi egale unghiul normalelor. Deci jumătatea suplimentului: $26^0 33' 59''$ reprezintă inclinarea normalei la faţă în raport cu axa considerată. Atunci: plecând de la x sau y vom lua la dreapta şi la stânga, arcuri egale cu $26^0 33' 59''$ şi obţinem astfeliu proiecţiunea polilor acelor feţe.

Pentru notaţia tuturor feţelor, ocservăm că e de ajuns de a determina notaţiunea uneia pentru a obţine prin metoda rotaţiei în jurul lui T, notaţiele tuturor celorlalte. ⟨Fig. 115⟩. Aşa:

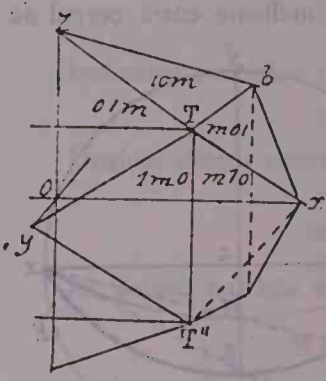


Fig. 115

faţa xTb fiind paralelă cu *y*, atinge pe z la m şi pe x la extremitate, va ave deci notaţia : ⟨m01⟩. Celelalte feţe vor ave succesiv notaţiunele : ⟨1om⟩ ⟨01m⟩ ⟨0m1⟩ ⟨1m0⟩ şi ⟨m10⟩.

— Pentru a determina prin metoda trigonometrică valoarea lui *m*, observăm că se pot prezenta două cazuri. ⟨Fig. 116⟩ :

1. Se dă muchea X. Pentru inclinarea feţei zTb pe axa X, avem :

$$\alpha = zmO = RAP.$$

$$\text{Insă : } RAP = \frac{RAx}{2} \text{ şi } RAX = A - 90^0$$

$$\text{Deci : } \alpha = \frac{A - 90^0}{2}.$$

Cunoscând pe α avem : $m = \cot g\, \alpha$.

II. Se dă muchea Y. In triunghiul sferic ⟨1⟩ avem un unghiu de 90^0, un altul de 45^0 şi al treilea $\frac{Y}{2}$.

Vom calcula pe *i* cu formula :

$$\cos i = \frac{\cos \frac{Y}{2}}{\sin 45^0}$$

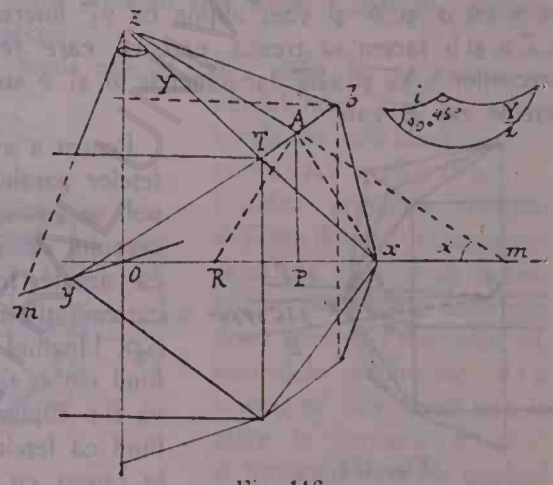


Fig. 116

Şi atunci în triunghiul mOz avem : $m = tg\, i$.

— Iată cum facem calculele servindu-ne de proiecţiuni.

1. Se dă muchea X şi se caută indicii feţei zaT a căreia notaţiune este ⟨01m⟩. ⟨Fig. 117⟩. Ecuaţia feţei este :

$$\cos pz = m \cos py.$$

$$\text{Deci : } \quad m = \frac{\cos pz}{\cos py}.$$

Să determinăm deci valorile lui cos pz și cos py, în funcțiune de X. Să considerăm proiecțiele p, q, r, a trei fețe; în h și k avem intersecția cercurilor mari $x\bar{x}$ și $y\bar{y}$ cu proiecțiele cercurilor de 45^0. In figură avem:

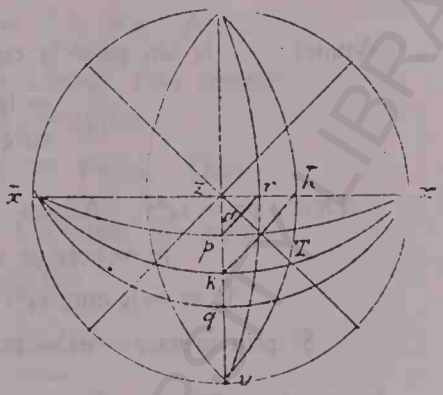


Fig. 117

$$pq = 180^0 - X$$

$$\text{deci } pk = 90^0 - \frac{X}{2}.$$

Apoi: $pz = kz - pk =$

$45^0 - 90^0 + \frac{X}{2}$ sau:

$$pz = \frac{X}{2} - 45^0$$

și $$py = ky + pk = 45^0 + 90^0 - \frac{X}{2}$$

Atunci: $$m = \frac{\cos pz}{\cos py} = \frac{\cos\left(\frac{X}{2} - 45^0\right)}{\sin\left(\frac{X}{2} - 45^0\right)} = \operatorname{cotg}\left(\frac{X}{2} - 45^0\right).$$

Exemplu. Fie: $X = 126^0 53'$. Deci: $\frac{X}{2} = 63^0 26' 30''$.

Și prin urmare: $\frac{X}{2} - 45^0 = 18^0 26' 30''$.

Atunci: $\lg m = \lg \operatorname{cotg} 18^0 26' 30'' = 0.47716.$

Deci: $m = 3.$

II. Se da Y. Avem:

$$pr = 180^0 - Y \quad \text{Deci: } pa = 90^0 - \frac{Y}{2}.$$

In triunghiul sferic dreptunghic paz, avem:

$$\sin pa \quad \sin pz \sin 45^0$$

Deci: $$\sin pz = \frac{\sin pa}{\sin 45^0} = \frac{\cos \frac{Y}{2}}{\sin 45^0}$$

Insă: $py = 90^0 - pz$. Deci: $\cos py = \sin pz$.

Atunci avem: $$m = \frac{\cos pz}{\cos py} = \frac{\cos pz}{\sin pz} = \operatorname{cotg} pz.$$

Exemplu. Fie $Y = 160^0 15'$. Deci : $\frac{Y}{2} = 80^0 7' 30''$.

Atunci : $\lg \sin pz = \lg \cos \frac{Y}{2} - \lg \sin 45^0$. Sau :

$= \lg \cos 80^0 7' 30'' = \bar{1}.23462.$

$\operatorname{cotg} \sin 45^0 \quad = 0.15052.$

$\lg \sin pz = \bar{1}.38514.$

Deci : $pz = 14^0 2'$. Atunci :

$m = \operatorname{cotg} pz$ ne dă :

$\lg m = \lg \operatorname{cotg} 14^0 2' = 0.60215.$

Şi prin urmare : $m = 4$.

——

Pentru formulele de transformare avem :

$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{1}} b^{\frac{1}{\infty}} = b^{\frac{p}{q}} = a : \frac{p}{q} a : \infty a = \infty O \frac{p}{q} = \langle pq0 \rangle.$

Pentru principalele Tetrahexaedre vom ave :

$b^{\frac{1}{0}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{3}{2}} = a : \frac{3}{2} a : \infty a = \infty O \frac{3}{2} = \langle 320 \rangle.$

$b^{\frac{1}{0}} b^1 b^{\frac{1}{2}} = b^2 = a : 2 a : \infty a = \infty O 2 = \langle 210 \rangle.$

$b^{\frac{1}{0}} b^1 b^{\frac{1}{3}} = b^3 = a : 3 a : \infty a = \infty O 3 = \langle 310 \rangle.$

——

Să calculăm elementele Tetrahexaedrului :

$a : \frac{3}{2} a : \infty a = \langle 320 \rangle.$

Avem : $a' = \frac{m \sqrt{2}}{m+1} = \frac{3}{5} \sqrt{2} = 0.8487.$

$a'' = \frac{m}{m+1} \sqrt{3} = \frac{3}{5} \sqrt{3} = 1.040.$

Apoi : $\operatorname{tg} \alpha = m$ Deci : $\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg m = \lg 1.5.$

Sau : $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0.17609$ Deci : $\alpha = 56^0 18'$ sau

$2\alpha = 112^0 36'.$

De asemenea : $\operatorname{tg} \alpha' = m \sqrt{2} = 2.12175.$ Atunci :

$\lg \operatorname{tg} \alpha' = \lg 2.12175.$ sau $\lg \operatorname{tg} \alpha' = 0.32654.$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin urmare: $\alpha' = 64^0 45'$ sau $2\alpha' = 129^0 30'$.

Mai avem: $tg\,\beta = \frac{m+1}{m-1} = \frac{2.5}{0.5.} = 5$. Atunci:

$lg\,tg\,\beta = lg\,5$ sau $lg\,tg\,\beta = 0.69897$. Prin urmare:

$\beta = 78^0 41'$ sau $2\beta = 157^0 22'$.

In fine: $tg\,\beta' - \sqrt{2m^2+1.} = \sqrt{5.50}$. Deci:

$lg\,tg\,\beta' = \frac{lg\,5.50}{2} = 0.37038$ De unde: $\beta' = 66^0 50'$

Şi prin urmare: $2\beta' = 133^0 40'$.

II. Forme hemiedrice.

S'a zis că. formele hemiedrice se obţin dacă se modifică numai jumatate din elementele formei primitive. Aceste forme pot fi:

1. *Forme hemiedrice cu feţe inclinate* care nu au nici macar două feţe paralele. 2. *Forme hemiedrice cu feţe paralele* şi 3. *Forme hemiedrice plagiedre.* Pe lângă aceste mai există un gen de dublă hemiedrie numită: *Tetartoedria*, în care se obţine numai a patra parte din feţele formei holoedrice corespondente.

Pentru notaţia formelor hemiedrice, după Levy şi Naumann, se scrie notaţia formei holoedrice corespondente, şi se precede de semnul $\pm \frac{1}{2}$. Pentru notaţiele după Miller se întrebuinţează: litera $\varkappa$ pe care o punem înaintea notaţiunei formei holoedrice corespunzetoare, pentru formele cu feţe inclinate (de la cuvântul grec $\chi\lambda\acute{\iota}\nu o\varsigma$); litera π pentru formele cu feţe paralele, şi litera γ (de la cuvântul Giroedru) pentru formele plagiedre. Pentru a nota formele tetartoedrice se scrie înaintea formei holoedrice corespondente: $\pm \frac{1}{4}$ sau după Miller: $\varkappa\pi$.

1. *Hemiedrie cu feţe inclinate.*

Pentru a obţine formele hemiedrice cu feţele inclinate, plecând de la cub, trebue să modificăm elementele care corespund unei axe de simetrie nepareche; în cazul nostru sunt unghiurile solide, care corespund axelor ternare. Deci, vom obţine 4 forme hemiedrice corespunzătoare la atâtea forme holoedrice, prin modificarea unghiurilor. Aceste forme sunt:

Tetraedrul.

După Levy acest solid se obţine înlocuind prin o faţă unghiurile solide alterne ale cubului, aşa că, unui unghiu modificat la o extremitate a unei axe ternare să corespundă un unghiu nemodificat la cealaltă extremitate (Fig. 118).

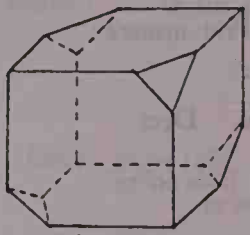


Fig. 118

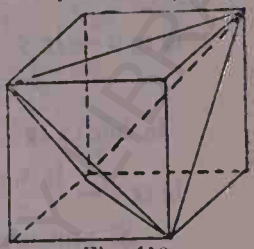


Fig. 119

Înaintând cu truncherurile până la dispariţia feţelor cubului, se obţine un solid care n'are decât 4 feţe şi care se chiamă *Tetraedru* (Fig. 119). El are 4 feţe care sunt triunghiuri ecvilaterale egale, apoi 6 muchi egale corespunzînd diagonalelor feţelor cubului; şi în fine 4 unghiuri solide triedre egale. După poziţia unghiurilor cubului care au fost modificate, se obţin două solide din care: unul direct sau *pozitiv* şi altul *invers* sau *negativ*. (Fig. 120). Atunci notaţia generală a tetraedrelor este:

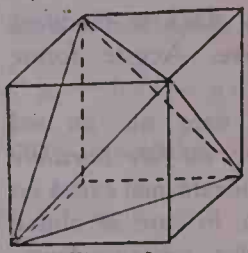


Fig. 120

$$\pm \frac{1}{2} a'.$$

După Naumann, pentru a obţine formele hemiedrice, se întrebuinţează o metodă generală, care consistă în a considera forma holoedrică corespondentă şi a desvolta feţele alterne până la dispariţia celorlalte feţe.

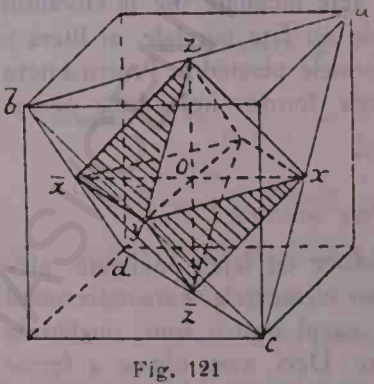


Fig. 121

Considerând deci Octaedrul (Fig. 121) să presupunem că în piramida superioară desvoltăm feţele alterne ne adjacente $z\,y\,x$ şi $z\,\bar{y}\,\bar{x}$, iar în piramida inferioară feţele alterne neadjacente: $x\,\bar{y}\,\bar{z}$ şi $y\,\bar{x}\,\bar{z}$. Este evident că, cele două feţe superioare desvoltându-se, vor avea ca intersecţie dreaptă *ab*, paralelă cu $x\,y$ şi $\bar{x}\,\bar{y}$

şi trecând prin z, care este punctul comun al acestor două feţe; pe când feţele inferioare vor ave ca intersecţie dreaptă *dc* care trece prin $\bar{z}$ şi e paralelă cu $x\,\bar{y}$ şi $\bar{x}\,y$. Şi fiind că în acelaş timp feţele superioare trebue să se întâlnească cu feţele inferioare, faţa $x\,y\,z$ va ave cu $x\,\bar{y}\,\bar{z}$ intersecţia *ac* care trece prin x, paralelă cu $y\,z$ şi $\bar{y}\,\bar{z}$.

Notaţiunea sa va fi: $+\frac{O}{2}$.

După Miller avem: z (111) pentru tetraedrul pozitiv şi z ($1\bar{1}\,1$) pentru tetraedrul negativ.

— Este uşor de văzut că, unghiul a două feţe adjacente a Tetraedrului va fi suplimentul unghiului feţelor Octaedrului, deci el va ave ca valoare: $70^0 31' 7''$.

Tetraedrul Piramidat.

Se obţine acest solid după Levy, înlocuind unghiurile alterne ale cubului prin trei feţe inclinate către feţele cubului. Solidul care rezultă are forma unui tetraedru a cărui feţe sunt acoperite de piramide triunghiulare. (Fig. 122).

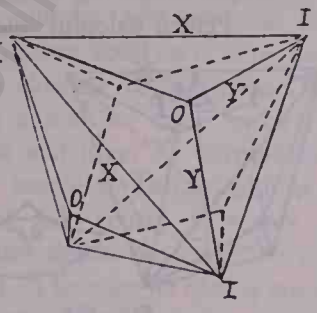


Fig. 122

Din această cauză se numeşte *Tetraedrul piramidat* sau *Tritetraedru*. El are: 12 feţe egale care sunt triunghiuri isoscele, 18 muchi care sunt de două feluri: 6 muchi X corespunzetoare cu muchile tetraedrului şi 12 muchi Y mai scurte, reunite câte trei în jurul extremităţilor axelor ternare, şi 8 unghiuri solide din care: 4 unghiuri I formate de 6 muchi alternativ lungi şi scurte, şi 4 unghiuri O formate din câte trei muchi scurte. Acest solid fiind hemiedria Trapezoedrului, va ave ca notaţiune:

$$\pm \frac{1}{2} a^m.$$

— Să considerăm după Naumann un Icositetraedru şi să presupunem că feţele piramidelor O şi O' se desvoltă pe când celelalte dispar. (Fig. 123). Feţele piramidei O desvoltându-se cele trei muchi care le separă se prelungesc după: Om, On, şi

Op, iar acele ale piramidei O' se prelungesc după O'n, O'p şi O'q. Apoi: feţele a'' şi b'' având un punct comun în y, desvoltându-se, vor da prin intersecţia lor dreaptă *np*. În acelaş mod vom obţine muchile mn, mp, nq şi pq, care determină conturnul feţelor anterioare.

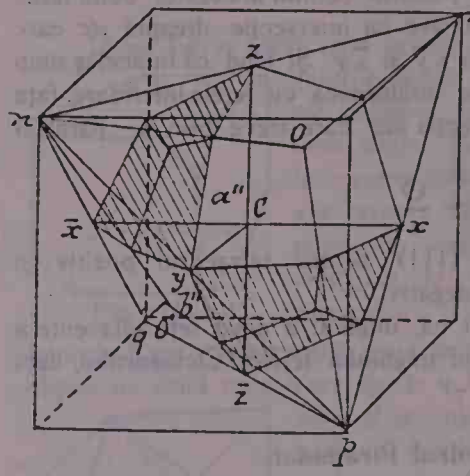


Fig. 123

Acest solid numit de Naumann *Triakistetraedru*, va avea ca notaţie:

$$+\frac{mOm}{2}.$$

După Miller va fi notat: $z\langle 11m\rangle$ şi $z\langle 1\bar{1}m\rangle$.

— Pentru calculul elementelor Triakistetraedrului, prin metoda trigonometrică, avem două cazuri ⟨Fig. 124⟩.

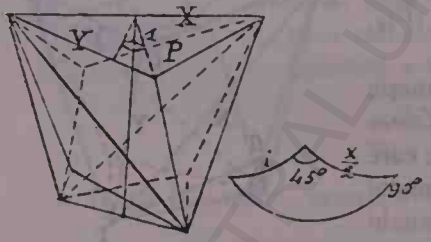


Fig. 124

1. Se dă diedrul X. Considerăm triunghiul sferic dreptunghic ⟨1⟩ care are un unghiu de 45^0 şi o latură $\frac{X}{2}$. Calculăm pe *i* cu formula:

$$\operatorname{tg} i = m = \frac{\operatorname{tg}\frac{X}{2}}{\cos 45^0}.$$

2. Când se dă diedrul Y, ne servim de aceleaşi formule ca şi pentru Trapezoedru, căci muchile Y sunt aceleaşi.

— Prin metoda proiecţiunelor procedăm astfel ⟨Fig. 125⟩.

I. Se dă X şi se caută valoarea lui *m* pentru notaţia: ⟨11 m⟩. Ecuaţia feţei fiind:

$$m\cos px = m\cos py = \cos pz \text{ avem:}$$

$$m = \frac{\cos pz}{\cos py}.$$

Pentru a găsi valorile lui cos pz şi cos py, considerăm triunghiul sferic ypz, care ne dă:

$$\cos py = \sin pz \cos yzp.$$

sau $\cos py = \sin pz \cos 45^0$

Insă: $pp' = 180^0 - X$ Deci:

$pz = 90^0 - \frac{X}{2}$. Atunci:

$$\cos py = \cos \frac{X}{2} \cos 45^0$$

Şi atunci:

$$m = \frac{\sin \frac{X}{2}}{\cos \frac{X}{2} \cos 45^0} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{X}{2}}{\cos 45^0}$$

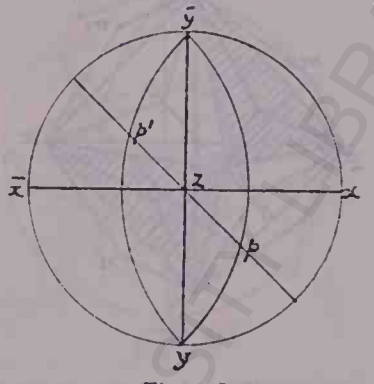


Fig. 125

II. Când se da V, se fac calculele ca pentru Trapezoedru.

Dodecaedrul Trapezoidal.

Inlocuind unghiurile alterne ale cubului prin câte trei feţe inclinate către muchile cubului, se obţine un solid cu 12 feţe, care sunt nişte trapeze simetrice şi care se cheamă *Dodecaedru Trapezoidal* (Fig. 126). El are încă: 24 muchi de două specii: 12 muchi mai lungi X corespunzătoare muchilor Tetraedrului şi 12 muchi mai scurte G; apoi 14 unghiuri solide din care: 6 unghiuri A formate de câte 4 muchi alternativ lungi şi scurte, apoi 4 unghiuri O formate de câte trei muchi scurte şi în fine 4 unghiuri I formate de câte trei muchi mari.

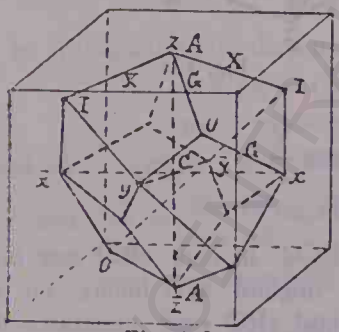


Fig. 126

Notaţiunea sa este:

$$\pm \frac{1}{2} a^{\frac{1}{m}}.$$

După Naumann solidul acesta numit: *Dodecaedru Deltoidal*, derivă din Triakisoctaedru prin desvoltarea feţelor care compun piramidele alterne. (Fig. 127). Dacă feţele piramidelor O şi O' se desvoltă, atunci faţa yO2 a piramidei O se întâlneşte

cu faţa $\bar{x}O'y$ a piramidei O' şi având punctul y comun vor da intersecţia *ym* ; de asemenea feţele yOx şi $yO'\bar{z}$ vor da intersecţia *yn*. Dacă desvoltăm de asemenea feţele piramidelor posterioare, vom ave în faţă intersecţiele : zm, zm', xn, xm', $\bar{z}n$, $\bar{x}m$, $\bar{x}n'$, $\bar{z}n'$ care complectează conturnul feţelor noului solid.

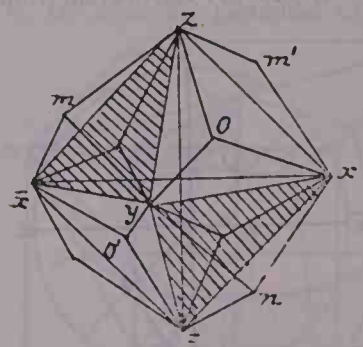


Fig. 127

Notaţiunea sa va fi : $\pm \frac{m\,O}{z}$.

După Miller avem : z (mm1) şi z (m$\bar{m}$1).

— Calculul lui *m* prin metoda trigonometrică prezintă două cazuri :

1. Se dă diedrul X. Considerând faţa zdye, căutăm să determinăm unghiul ce ea face cu axa ternară Od. (Fig. 128) In triunghiul sferic dreptunghic (1) avem un triunghiu de 60^0 şi altul $\frac{X}{2}$. Calculăm pe *i* prin formula :

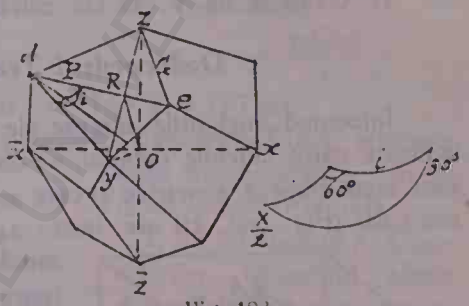


Fig. 128

$$\cos i = \frac{\cos \frac{X}{2}}{\sin 60^0}$$

Insă noi avem : eRO = i + ROd în care eRO este inclinarea feţei pe axa binară şi ROd unghiul axei binare cu axa ternară, care este : $35^0 15$. Insă unghiul eRO este jumătatea diedrului A a trioctaedrului corespondent. Cunoscând deci acest unghiu, putem să deducem valoarea lui *m* ca pentru Trioctaedru.

2. Se dă muchea G, care fiind egală cu muchea B a trioctaedrului, calculul este analog.

— Pentru a face calculul prin proiecţiuni avem şi aici două cazuri.

1) Se dă muchea G şi se caută valoarea lui *m* pentru faţa P.

(Fig. 129). Se întrebuinţează aceiaşi formulă ca pentru Trioctaedru.

2) Se dă diedrul X. Se construesc proiecţiunile p şi p' a polilor feţelor care formează diedrul X. Atunci vom ave:

$$pp' = 180^0 - X \text{ deci:}$$

$$pa = 90^0 - \frac{X}{2}.$$

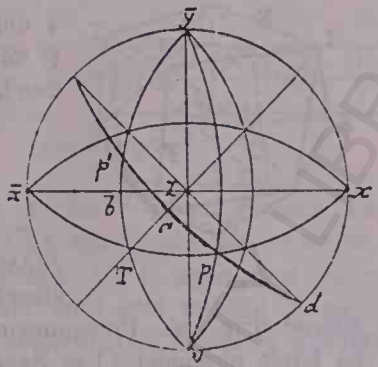


Fig. 129

Ecvaţia feţei fiind:

$$\cos pz = \cos py = m \cos px$$

De unde: $m = \frac{\cos py}{\cos px}$.

Să determinăm valorile lui cos py şi cos px. In triunghiul sferic dreptunghic aTp, avem:

$$\sin ap = \sin pT \sin pTa$$

Insă noi avem: $cTa = 60^0$ şi $Tc = 35^015'52''$ şi $Ty = 54^044'8''$ căci T e proiecţiunea polului Octaedrului.

Atunci ecvaţia precedentă ne dă:

$$\sin pT = \frac{\sin ap}{\sin pTa} = \frac{\cos \frac{X}{2}}{\sin 60^0}$$

In triunghiul sferic dreptunghic Cpy avem:

$$\cos py = \cos pc \cos 45^0$$

Insă: $px = cx - cp = 90^0 - cp.$

Şi fiind că: $cp = Tp - Tc = Tp - 35^015'52''$

Va rezulta: $m = \frac{\cos py}{\cos px} = \frac{\cos pc \cos 45^0}{\sin pc}$ sau:

$$m = \operatorname{cotg} pc \cos 45^0$$

Hexatetraedrul.

Acest solid numit încă: *Hemihexoctaedru* se deduce din cub prin înlocuirea a 4 unghiuri alterne fiecare prin 6 feţe. (Fig. 130). Se obţine astfeliu un solid cu 24 feţe care sunt triunghiuri scalene. El are încă: 36 muchi care sunt de 3 feluri: 12 muchi lungi F, 12 muchi mijlocii X şi 12 muchi scurte G. Unghiurile în număr de 14 sunt asemenea de 3 feluri: 4 unghiuri O formate

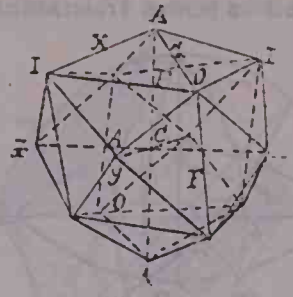


Fig. 130

de 6 muchi alternativ lungi şi scurte, 4 unghiuri I de 6 muchi alternativ lungi şi mijlocii şi 6 unghiuri A de câte 4 muchi alternativ mijlocii şi scurte.

Notaţiunea solidului va fi :

$$\pm \frac{1}{2} b^1 b^{\frac{1}{m}} b_{\infty}.$$

— Acest solid numit de Naumann *Hexakistetraedru*, se obţine din Hexakisoctaedru, desvoltând feţele piramidelor alterne (Fig. 131). Presupunem că feţele piramidei O se desvoltă şi se întâlnesc cu feţele piramidei O'. Este uşor de văzut că faţa Oay se întâlneşte cu O' d y, după yO'', iar feţele Oyb şi O'ye după yO'''. — De asemenea celelalte feţe a piramidei O se întâlnesc cu feţele piramidelor posterioare, dau intersecţiele : zO'' zO^{IV} xO''' xO^{IV} etc. ceia ce complectează contururile celor 6 feţe în jurul lui O.

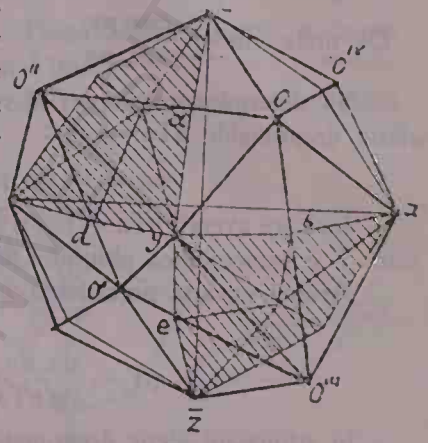


Fig. 131

Notaţiunea solidului va fi :

$$\pm \frac{m\ On}{2}.$$

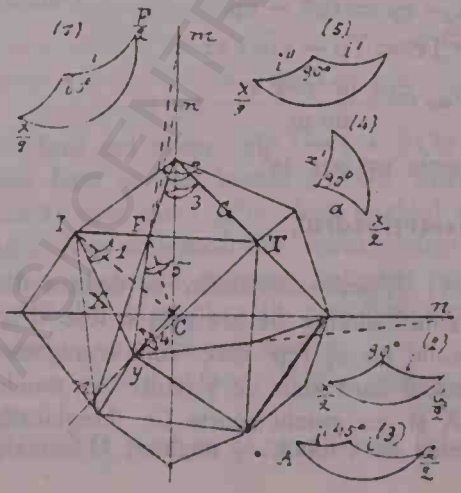


Fig. 132

După Miller avem : x (m n mn) şi x (m $\bar{n}$ mn).

— Pentru a calcula valoarea indicilor m şi n prin metoda trigonometrică, observăm că se pot prezenta 3 cazuri (Fig. 132).

1. Se dau diedrele F şi X. In triunghiul sferic (1) cunoaştem $\frac{X}{2}$ şi $\frac{F}{2}$ precum şi unghiul de

60^0 a planului axelor binare, cu planul axelor ternare. Se calculează i cu ajutorul formulei:

$$\cos\frac{i}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}\left(\frac{F}{2}-\frac{X}{2}-60^0\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{X}{2}+60-\frac{F}{2}\right)}{\sin\frac{F}{2}\sin 60^0}}$$

Unghiul i reprezintă inclinarea muchei F pe axa ternară. Pentru a ave inclinarea aceleaşi muchi pe axa binară, observăm că unghiul CFT fiind exterior triunghiului CFT, este egal cu suma unghiurilor neadjacente din care unul este unghiul i pe care l-am determinat şi cel-alt este unghiul axei binare cu axa ternară care este: $35^0 15' 52''$. Deci avem:

$$i' = i + 35^0 15' 52''$$

Cunoscând acest unghiu, putem determina inclinaţia muchei X' a Hexoctaedrului corespondent, pe axa cvaternară Cy. In triunghiul ⟨5⟩ cunoaştem unghiurile $\frac{V}{2}$ şi $\frac{X}{2}$ precum şi i'.

Determinăm pe i'' prin formula:

$$\cos i'' \quad \frac{\cos\frac{V}{2}}{\sin\frac{X}{2}}.$$

Cunoscând pe i'' în triunghiul CFy avem:

$$FyC = \alpha = 180^0 - \langle i'' + 45^0\rangle$$

Deci: $\quad tg\ \alpha = n.$

α fiind inclinarea muchei X a Hexoctaedrului pe axa cvaternară.

Pentru a găsi valoarea lui m considerăm triunghiul sferic dreptunghic ⟨4⟩ ⟨Fig. 133⟩ în care cunoaştem: α şi $\frac{X}{2}$ şi putem să determinăm pe α' prin formula:

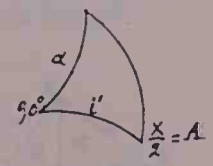


Fig. 133

$$tg\ \alpha' = tg\frac{X}{2}\sin\alpha.$$

Şi atunci în triunghiul Cy m avem:

$$Cm = m = Cy\ tg\ \alpha' \text{ sau:}$$

$$m = tg\ \alpha'.$$

II. Se dă muchile X şi G. In figura precedentă avem triunghiul sferic dreptunghie ⟨2⟩ şi cunoaştem pe $\frac{X}{2}$ şi $\frac{G}{2}$, şi calculăm pe *i* prin formula:

$$\cos i = \frac{\cos \frac{X}{2}}{\sin \frac{G}{2}}$$

Avem deci inclinarea muchei G pe axa cvaternară. Dacă considerăm atunci triunghiul sferic ⟨3⟩ în care cunoaştem pe *i* şi $\frac{G}{2}$ precum şi unghiul de 45^0 format de planul axelor cvaternare cu planul axelor binare, vom pute calcula pe A, care reprezintă valoarea lui $\frac{X'}{2}$ a Hexoctaedrului, precum şi a lui *i'* care reprezintă inclinarea feţei pe axa cvaternară, prin formulele

$$\cos A = -\cos 45^0 \cos \frac{G}{2} + \sin 45^0 \sin \frac{G}{2} \cos i$$

şi

$$\cos \frac{i'}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}\left(\frac{G}{2} + 45^0 - A\right) \cos \frac{1}{2}\left(\frac{G}{2} + A - 45^0\right)}{\sin 45^0 \sin A}}.$$

Cunoscând pe *i'*, din triunghiul ACn deducem:

$$Cn = n \quad AC \operatorname{tg} i'. \qquad \text{sau:} \qquad n = \operatorname{tg} i'.$$

Pentru a găsi valoarea lui *m* considerăm triunghiul sferic dreptunghic ⟨4⟩ în care cunoaştem pe: $\frac{X'}{2}$ şi *i'* şi calculăm pe α prin formula:

$$\operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{tg} \frac{X'}{2} \sin i'.$$

Atunci în triunghiul yCm, avem:

$$Cm - m = Cy \operatorname{tg} \alpha \qquad \text{sau:}$$

$$m = \operatorname{tg} \alpha.$$

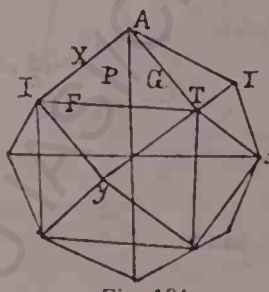


Fig. 134

III. Când se dau muchile F şi G ne găsim în acelaş caz ca la Hexoctaedru când se dau V şi V_e şi rezolvim problema ca şi acolo.

— Şi în cazul proiecţiunelor ni se prezinta trei cazuri ⟨Fig. 134⟩.

1. Se dau muchile X şi G şi se caută

ndicii feţei P, a cărei notaţiune este : k ⟨m n mn⟩. Ecvaţia acesitei feţe fiind :

$$m \cos px = n \cos py = \cos pz.$$

De unde : $m = \frac{\cos pz}{\cos px}$

şi $n = \frac{\cos pz}{\cos py}$.

Trebue dar să căutăm valorile lui cos px, cos py şi cos pz în funcţiune de X şi G. ⟨Fig. 135⟩.

Projectând polii feţelor observăm că :

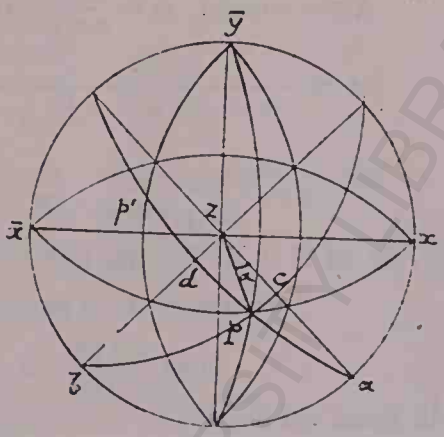


Fig. 135

$$pc = 90^0 - \frac{G}{2} \quad \text{şi} \quad pd = 90^0 - \frac{X}{2}.$$

Atunci în triunghiul sferic dreptunghic pcz avem :

$$\sin pc = \sin pz \sin \alpha \text{ sau :}$$

$$\cos \frac{G}{2} = \sin pz \sin \alpha. \ldots \langle 1 \rangle$$

De asemenea în triunghiul sferic dreptunghic pdz, avem :

$$\sin pd = \sin pz \sin pzd \text{ sau : } \cos \frac{X}{2} = \sin pz \cos \alpha \ldots \langle 2 \rangle$$

Divizând ⟨1⟩ prin ⟨2⟩ avem :

$$tg\ \alpha = \frac{\cos \frac{G}{2}}{\cos \frac{X}{2}}.$$

Din triunghiul pzy, deducem :

$$\cos py = \sin pz \cos pzy$$

sau : $\cos py = \sin pz \cos \langle 45^0 - \alpha \rangle$.

Şi din triunghiul pxz, deducem :

$$\cos px = \sin pz \cos pzx.$$

sau : $\cos px = \sin pz \cos \langle 45^0 + \alpha \rangle$.

BCU ASICENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

Avem atunci : $m = \frac{\cos pz}{\cos px}$ şi $n = \frac{\cos pz}{\cos py}$. sau :

$$m = \frac{\cos pz}{\sin pz \cos \langle 45^0 + \alpha \rangle} = \frac{\operatorname{cotg} pz}{\cos \langle 45^0 + \alpha \rangle}. \quad \text{şi}$$

$$n = \frac{\operatorname{cotg} pz}{\sin \langle 45^0 + \alpha \rangle}, \text{ cu : } \sin pz = \frac{\cos \frac{G}{2}}{\sin \alpha}.$$

2. Se dă F şi X. Ecvaţia feţei va fi ca şi în cazul precedent :

$$m \cos px = n \cos py = \cos pz, \text{ de unde :}$$

$$m = \frac{\cos pz}{\cos px} \quad \text{şi} \quad n = \frac{\cos pz}{\cos py}.$$

In figura 136 avem :

$$pd = 90^0 - \frac{F}{2} \quad \text{şi} \quad pc = 90^0 - \frac{X}{2}.$$

Triunghiul sferic dreptunghic $fe\overline{y}$ ne dă :

$$\cos fe = \cos^2 45^0 = \frac{1}{2}.$$

Deci : $fe = 60^0$.

Pe de altă parte, în acelaş triunghiu avem :

$$\cos fe = \operatorname{cotg}^2 ef\overline{y}.$$

Deci : $ef\overline{y} = 54^0 44' 8''$.

Dacă considerăm acuma triunghiul sferic *pef*, vom ave :

$$\cos pe = \cos fe \cos pf + \sin fe \sin pf \cos pfe \ldots \langle 1 \rangle.$$

Insă : $pe = de - pd = 90^0 - \left(90^0 - \frac{F}{2}\right) = \frac{F}{2}$.

De asemenea : $pf = fe + cp = 90^0 + 90^0 - \frac{X}{2}$

Atunci egalitatea ⟨1⟩ devine :

$$\cos \frac{F}{2} = -\cos 60^0 \cos \frac{X}{2} + \sin 60^0 \sin \frac{X}{2} \cos pfe$$

de unde : $\cos pfe = \dfrac{\cos \frac{F}{2} + \cos 60^0 \cos \frac{X}{2}}{\sin 60^0 \sin \frac{X}{2}}$ sau :

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\cos pfe = \frac{2\cos\frac{F}{2} + \cos\frac{X}{2}}{tg\ 60^0 \sin\frac{X}{2}}$$

Insă : $pfb = 180^0 - efy - efp = 180^0 - 54^044'8'' - efp.$

sau : $pfb = 125^015'52'' - efp = bc.$

In triunghiul sferic dreptunghic pzc, avem :

$$\cos pz = \cos cz \cos pz = \sin bc \sin\frac{X}{2}.$$

In triunghiul sferic pab, avem :

$\cos pa = \sin pb \cos pba$, de unde :

$\cos pba = \cos pby = \frac{\cos pa}{\cos pb}$ sau :

$$\cos pba = \frac{\cos\frac{X}{2}}{\sin pb}$$

Insă triunghiul pby ne dă :

$\cos py = \cos pb \cos 45^0 + \sin pb \sin 45^0 \cos pby$

Şi fiindcă : $\cos 45^0 = \sin 45^0$. Rezultă :

$\cos py = \cos 45^0 \langle \cos pb + \sin pb \cos pby \rangle$ sau :

$$\cos py = \cos 45^0 \left(\cos pb + \cos\frac{X}{2} + \cos\frac{X}{2}\right) \text{ sau încă :}$$

$$\cos py = \cos 45^0 \left(\cos bc \sin\frac{X}{2} + \cos\frac{X}{2}\right)$$

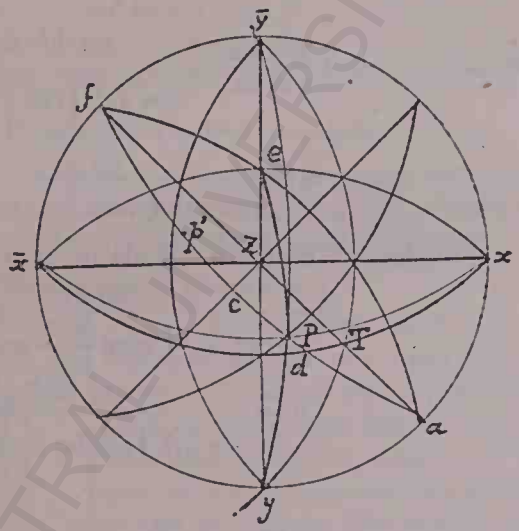


Fig. 136

atunci : $$n = \frac{\cos pz}{\cos py} = \frac{\sin bc \sin\frac{X}{2}}{\cos 45^0\left(\cos bc \sin\frac{X}{2} + \cos\frac{X}{2}\right)}$$

sau : $$n = \frac{\sin bc}{\cos 45^0\left(\cos bc + \cot g\frac{X}{2}\right)}$$

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru a găsi valoarea lui px, vom considera triunghiul sferic pxa, în care avem :

$$\cos px = \cos 45^0 \cos pa + \sin 45^0 \sin pa \cos pax$$

sau : $$\cos px = \cos 45^0 \left[\cos \frac{X}{2} + \sin \frac{X}{2} \cos \langle 90^0 + paz \rangle \right]$$

sau încă : $$\cos px = \cos 45^0 \left[\cos \frac{X}{2} - \sin \frac{X}{2} \sin paz \right]$$

și în fine : $$\cos px = \cos 45^0 \left(\cos \frac{X}{2} - \sin \frac{X}{2} \cos bc \right)$$

Atunci : $$m = \frac{\cos pz}{\cos px} = \frac{\sin bc \sin \frac{X}{2}}{\cos 45^0 \left(\cos \frac{X}{2} - \sin \frac{X}{2} \cos bc \right)}$$ sau :

$$m = \frac{\sin bc}{\cos 45^0 \left(\operatorname{cotg} \frac{X}{2} - \cos bc \right)}$$

In definitiv pentru a calcula pe *m* și *n* avem :

$$m = \frac{\sin bc}{\cos 45^0 \left(\operatorname{cotg} \frac{X}{2} - \cos bc \right)}$$ și

$$n = \frac{\sin bc}{\cos 45^0 \left(\cos bc + \operatorname{cotg} \frac{X}{2} \right)}$$

In care : $bc = 125^0 15' 52'' - efp$ și $\cos efp = \frac{2 \cos \frac{F}{2} + \cos \frac{X}{2}}{\operatorname{tg} 60^0 \sin \frac{X}{2}}$

Pentru a face aceste formule calculabile prin logaritmi, vom pune : $\cos bc = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$. Deci :

$$n = \frac{\sin bc \sin \frac{X}{2}}{\cos 45^0 \left[\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin \frac{X}{2} + \cos \frac{X}{2} \right]}$$ sau :

$$n = \frac{\sin bc \sin \frac{X}{2}}{\cos 45^0 \left(\sin \varphi \sin \frac{X}{2} + \cos \frac{X}{2} \cos \varphi \right)}$$
$$\cos \varphi$$

$$n = \frac{\sin bc \cos \varphi \sin \frac{X}{2}}{\cos 45^0 \left(\sin \varphi \sin \frac{X}{2} + \cos \varphi \cos \frac{X}{2} \right)}$$

sau:

$$n = \frac{\sin bc \cos \varphi \sin \frac{X}{2}}{\cos 45^0 \cos \left(\varphi + \frac{X}{2} \right)}$$

In acelaş mod se va găsi:

$$m \quad \frac{\sin bc \cos \varphi \sin \frac{X}{2}}{\cos 45^0 \cos \left(\varphi - \frac{X}{2} \right)}.$$

2. Hemiedrie cu feţe paralele.

Acest gen de hemiedrie are loc atât în cazul modificărilor pe muchi ca şi în cazul modificărilor pe unghiuri, considerând însă feţele paralele. Vom ave dar, două forme, care sunt:

Dodecaedrul pentagonal.

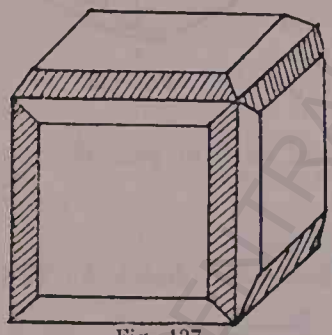


Fig. 137

Levy deduce acest solid din cub înlocuind muchile prin două feţe simetrice şi desvoltând feţele alterne până ce dispar feţele cubului ⟨Fig. 137⟩. Se obţine astfeliu un solid cu 12 feţe, care au forma de pentagoane simetrice şi care se numeşte *Dodecaedru pentagonal.*

Să considerăm cubul şi planul h k i l paralel cu muchea antero-superioară ⟨Fig. 138⟩ care întâlneşte muchile de la dreapta şi stânga în mijlocul lor, în punctele *h* şi *k* iar muchile verticale anterioare la $\frac{1}{4}$ din lungimea lor în *i* şi *l*. Un alt plan mnqp, paralel cu muchea inclinată de la dreapta, tae muchea anterosuperioară în *m* la $\frac{1}{4}$ din lungimea sa şi muchea verticală din dreapta în mijlocul seu *p*. Un al trei-

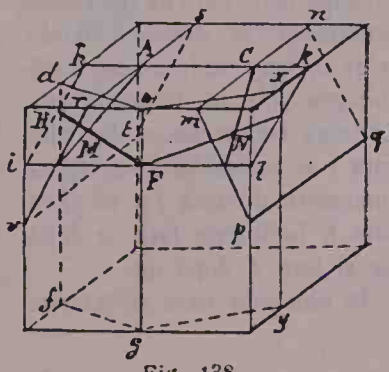


Fig. 138

lea plan paralel cu muchea superioară de la stânga, întâlneşte muchea verticală de la stânga, în mijlocul seu *v* şi muchea anterosuperioară în *r* la $\frac{1}{4}$ din lungimea sa. Planurile defg şi egyx, paralele cu muchile verticale, întâlnesc muchile inclinate la $\frac{1}{4}$ din lungimea lor şi muchea anterosuperioară în mijlocul ei *e*. Aceste 5 planuri se tae după dreptele CD, EF, FH şi AB. Intersecţia planului hikl cu faţa superioară a cubului fiind hk, aceste linii determină prin intersecţiele lor respective un pentagon ACNFM.

Dodecaedrul pentagonal are: 30 muchi care sunt de două feluri: 6 muchi Y mari, corespunzind cu feţele cubului, şi 24 muchi X mai mici. Unghiurile solide în număr de 20 sunt de asemeneade două feluri: 12 unghiuri triedre simetrice U formate din două muchi mici şi una mare, şi 8 unghiuri regulate O formate din câte trei muchi mici. Fig. 139 reprezintă solidul pozitiv, iar Fig. 140 pe cel negativ.

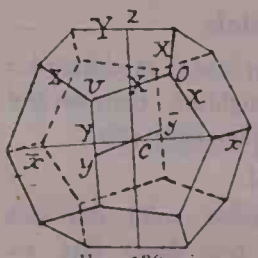


Fig. 139

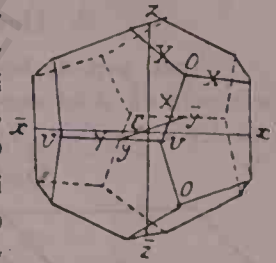


Fig. 140

Notaţiunea dodecaedrului pentagonal va fi în general:

$$+\frac{1}{2}\,b^{\frac{m}{n}}.$$

— După Naumann, dodecaedrul pentagonal derivă din Tetrakishexaedru prin desvoltarea feţelor alterne (Fig. 141). Să presupunem că, în piramida anterioară se desvoltă feţele *a* şi *b*, care se întâlnesc după dreapta gh; în piramida superioară trebue să se desvolte faţa f şi opusa sa care au ca intersecţie dreaptă *i o* pe când faţa f, întâlneşte faţa *a* după pg şi faţa *b* după qg.

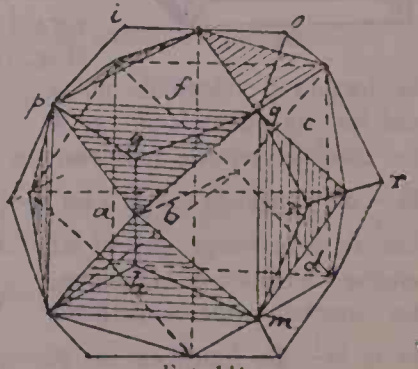


Fig. 141

In piramida care se găseşte

la dreapta, feţele opuse *c* şi *d* desvoltându-se vor ave ca intersecţie dreaptă nr, pe când *e* cu *f* se tae după 90, şi *e* cu *b* după qn, de asemenea *b* şi *d*, vor ave intersecţia mn Se obţin astfeliu două feţe pentagonale: ipgqo şi ghmnq. Tot aşa se vor obţine şi celelalte feţe.

Notaţia dodecaedrului pentagonal este: $\pm \frac{\infty Om}{2}$.

După Miller avem: *a* ⟨m.01⟩ şi *a* ⟨10m⟩.

— Pentru calculele trigonometrice ale elementelor dodecaedrului pentagonal, vom ave două cazuri de considerat ⟨Fig. 142⟩:

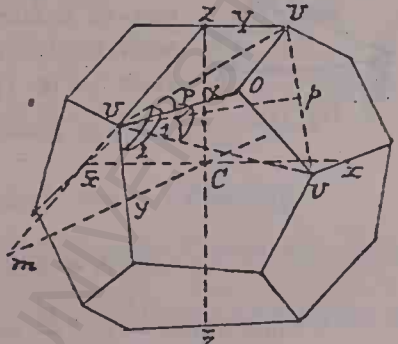


Fig. 142

I. Se dă diedrul mare Y, atunci $\frac{Y}{2}$ reprezintă înclinarea unei feţe pe axa cvaternară $z\bar{z}$. In triunghiul mCz vom ave:

$$mC = Cz \operatorname{tg} \frac{Y}{2} \quad \text{sau:}$$

$$m = \operatorname{tg} \frac{Y}{2}.$$

II. Se dă diedrul X Observăm că, unind prin drepte cele trei unghiuri V se obţine un triunghiu ecvilateral, care reprezintă planul feţei Octaedrului. Să scoborâm din unul de aceste unghiuri normala Up pe laturea opusă, şi să considerăm triunghiul sferic ⟨1⟩ în care unghiul P reprezintă înclinarea feţei dodecaedrului pe faţa Octaedrului. Vom ave: ⟨Fig. 143⟩.

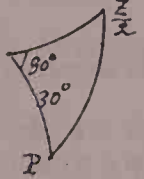


Fig. 143

$$\sin P = \frac{\cos \frac{X}{2}}{\cos 30^0}$$

Atunci, dacă considerăm triunghiul sferic dreptunghic ⟨2'⟩ în care avem ⟨Fig. 144⟩: $P' = 180^0 - P$. şi în care cunoaştem unghiul de $54^045'$, ca jumătatea diedrului Octaedrului, atunci se poate determina valoarea lui « prin formula:

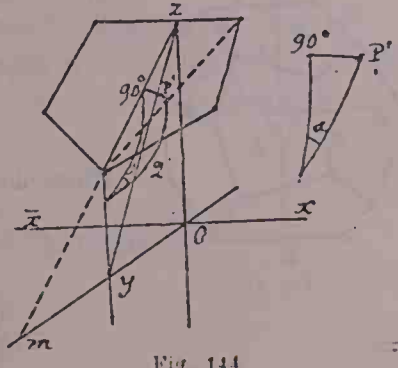


Fig. 144

$$\cos \alpha = \frac{\cos P'}{\sin 54^0 45'}$$

Unghiul $180^0 - \alpha$ reprezintă inclinarea feţei dodecaedrului pe muchea Octaedrului; însă muchea Octaedrului face cu axa cvaternară un unghiu de 45^0; prin urmare inclinarea feţei dodecaedrului pe axa cvaternară care este $\frac{Y}{2}$ va avea ca valoare: $(180^0 - \alpha) + 45^0$.

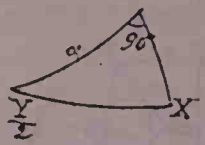


Fig. 145

Dacă considerăm triunghiul sferic (2) putem să scoatem o relaţiune între X şi Y. In acest triunghiu sferic, care este dreptunghic, avem: (Fig. 145):

$$\cos X = \cos \alpha \sin \frac{Y}{2}$$

Şi fiind că α este suplimentul lui $\frac{Y}{2}$ avem:

$$\cos X = \cos \frac{Y}{2} \sin \frac{Y}{2}.$$

Insă: $2 \cos \frac{Y}{2} \sin \frac{Y}{2} = 2 \sin \frac{Y}{2} = \sin Y$

Deci: $$2 \cos X = 2 \cos \frac{Y}{2} \sin \frac{Y}{2} = \sin Y.$$

sau: $$\cos X = \sin \frac{Y}{2}.$$

— Calculele cu ajutorul proiecţiunelor prezintă de asemenea două cazuri:

1. Să considerăm faţa a: se dă Y şi se caută a se determina indicii reţei a. Să considerăm trei feţe: a, b şi c a căror notaţiuni sunt (Fig. 146). (o1m) (1m0) şi (m01). Formula feţei a este:

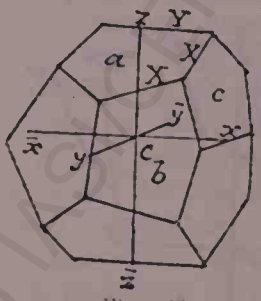


Fig. 146

$$m \cos ay = \cos az. \text{ de unde:}$$

$$m = \frac{\cos az}{\cos ay}.$$

Observăm că (Fig. 147). $az = 90^0 - \frac{Y}{2}$.

atunci $ay = 90^0 - az = \frac{Y}{2}$.

Deci: $$m = \frac{\sin \frac{Y}{2}}{\cos \frac{Y}{2}} = tg \frac{Y}{2}.$$

II. Se dă X. In figura precedentă avem:

$$ab = bc = ca = 180^0 - \frac{X}{2}.$$

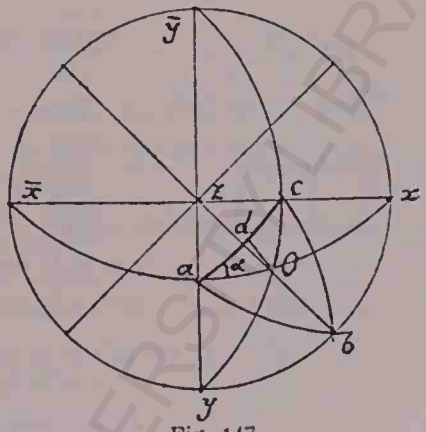


Fig. 147

In triunghiul sferic *abc* avem:

$$\sin \frac{bac}{2} = \frac{\cos 60^0}{\sin \frac{X}{2}} = \sin \alpha$$

Deci: $\cos 60^0 = \sin \alpha \sin \frac{X}{2}$.

Să împărţim in două părţi egale arcurile *ab* şi *ac* şi prin mijlocurile lor să facem să treacă perpendicular cercuri mari care se tae în punctul O, polul Octaedrului. Atunci: $Ozy = 45^0$ şi $Oz = 54^044'8''$.

Să considerăm acum triunghiul sferic dreptunghic aOd care ne dă:

$$\cos aOd = \cos ad \sin \alpha = \sin \frac{X}{2} \sin \alpha = \cos 60^0.$$

$$\text{Deci: } aOd = 60^0.$$

In acelaş triunghiu avem:

$$\sin aO = \frac{\cos \frac{X}{2}}{\sin 60^0}$$

Atunci triunghiul sferic aOz ne dă:

$$\cos aO = \cos az \cos Oz + \sin az \sin Oz \cos 45^0$$

Să punem: $\text{Sin } Oz \cos 45^0 = \cos Oz \operatorname{cotg} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (2)$

Atunci: $\cos aO = \cos Oz \langle \cos az + \sin az \operatorname{cotg} \varphi \rangle =$

$$= \cos Oz \frac{\sin \langle \varphi + az \rangle}{\sin \varphi}.$$

$$\text{De unde: } \sin \langle \varphi + az \rangle = \frac{\cos aO \sin \varphi}{\cos Oz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \langle 3 \rangle.$$

Insă din $\langle \alpha \rangle$ deducem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos Oz}{\sin Oz \cos 45^0} = \frac{\operatorname{cotg} Oz}{\cos 45^0}$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Şi fiind că cotg Oz = cos 45° urmează că: tg φ = 1.

Atunci ecuaţia (3) devine:

$$\sin (45^0 + az) = \frac{\cos aO \sin 45^0}{\cos Oz} \quad \text{căci: } \varphi = 45^0.$$

Insă: $ay = 90^0 - az$. Deci: $\cos ay = \sin az$

Atunci: $$m = \frac{\cos az}{\cos ay} = \text{cotg } az.$$

Aplicând logaritmii avem:

$$lg\ m = lg\ \text{cotg}\ az.$$

Cu: $$lg \sin (45^0 + az) = lg \cos aO + 0.08807.$$

şi $$lg \sin aO = lg \cos \frac{X}{z} + 0.06247.$$

Dodecadiedrul.

După Levy se obţine acest solid prin înlocuirea unghiurilor cubului prin câte 6 feţe, şi făcând să se desvolte numai jumătate din ele, şi anume feţele alterne. Se obţine un solid cu 24 de feţe care sunt trapeze nesimetrice. Solidul se numeşte *Dodecadiedru* sau *Diploedru* (Fig. 148). El mai are: 48 muchi, care sunt de 3 specii: 12 muchi mai lungi V, 24 muchi mijlocii Ξ şi 12 muchi scurte Y. Unghiurile solide în număr de 26 sunt de trei feluri: 6 unghiuri A formate din câte 4 feţe, 8 unghiuri O formate din 3 feţe şi 12 unghiur V formate din câte 4 feţe.

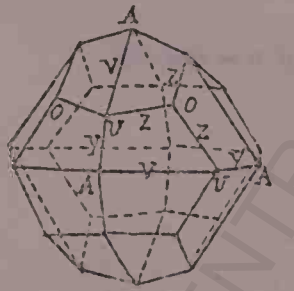


Fig. 148

Pentru notaţie suntem obligaţi de a întrebuinţa o paranteză pentru a-l deosebi de hemihexakisoctaedru, care are aceiaşi notaţiune, cu toate că e o altă hemiedrie. Notaţia sa va fi deci:

$$\pm \frac{1}{2} \left(b^1\ b_{\overline{m}}^{\frac{1}{m}}\ b_{\overline{n}}^{\frac{1}{n}} \right).$$

— După Naumann acest solid de deduce din hexachisoctadru prin desvoltarea unui grup altern de câte două feţe ad-

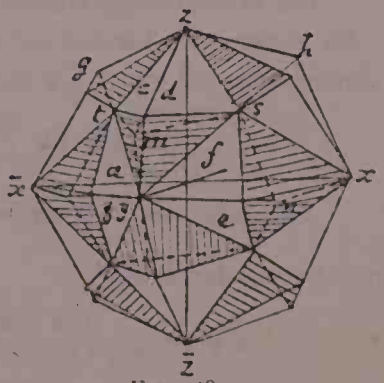


Fig. 149

jacente, în jurul extremităţilor axelor cvaternare (Fig. 149). Să presupunem că în piramida octogonală, în jurul extemităţii axei *z*, dezvoltăm feţele adjacate *c* şi *d*, anterioare şi feţele opuse posterioare; aceste feţe a căror intersecţie este muchea zm, se întâlnesc cu feţele posterioare după *zg* şi *zb*. In piramida corespunzătoare axei y, feţele *a* şi *b*, precum şi *e* şi *f* se desvoltă şi se întâlnesc după muchile *ym*, *yn*, *yi* şi *yr* şi feţele *c* şi *d*, după muchile *mb* şi *mt*, şi aşa mai departe pentru celelalte feţe. Fig. 148 reprezintă solidul pozitiv, iar fig. 150 pe cel negativ.

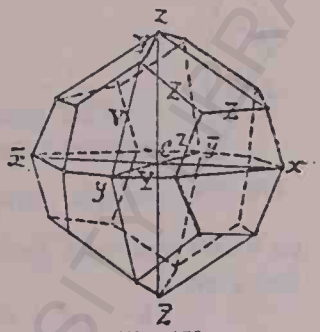


Fig. 150

Notaţiunea sa este : $\pm\left[\frac{mOn}{2}\right]$.

După Miller avem : $\pi\left(m\,1\,\frac{m}{n}\right)$ şi $\pi\left(m\,\frac{m}{n}\,1\right)$.

— Pentru calculele trigonometrice, observăm că muchile fiind de 3 feluri, vom avea de examinat trei cazuri (fig. 151).

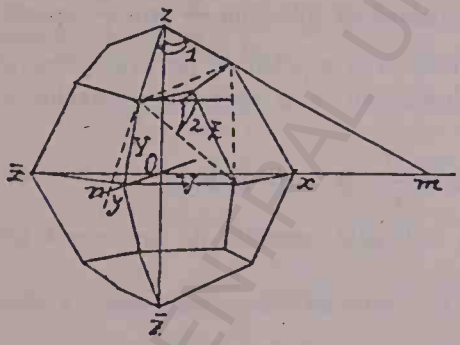


Fig. 151

1. Se dă Y şi V. Considerăm triunghiul sferic dreptunghic (1) (fig. 152) în care cunoaştem unghiurile $\frac{V}{2}$ şi $\frac{Y}{2}$. Atunci, pentru a determina valorile lui *a* şi *b*, ne servim de formulele :

$$\cos a = \frac{\cos\frac{Y}{2}}{\sin\frac{V}{2}} \text{ şi } \cos b = \frac{\cos\frac{V}{2}}{\sin\frac{Y}{2}}.$$

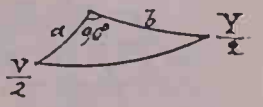


Fig. 152

Cunoscând atunci pe *a* şi *b*, putem scrie :

$$Om = m = Oz\,tg\,b \text{ şi } On = n = Oz\,tg\,a$$

sau : $m = tg\,b$, $n = tg\,a$.

II. Se dau Y şi Ξ. Să căutăm înclinarea feţei solidului, pe faţa Octaedrului, considerând triunghiul sferic ⟨2⟩ ⟨Fig. 153⟩ care ne dă:

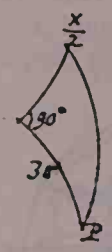


Fig. 153

$$\sin P = \frac{\cos \frac{\Xi}{2}}{\cos 30^0}$$

Apoi procedăm ca pentru dodecaedrul pentagonal, rezolvind triunghiul ⟨3⟩ în care $P' = 180^0 - P$ şi cunoaştem unghiul de $54^0 45$, şi $\frac{Y}{2}$. Determinăm atunci pe α care reprezintă înclinarea feţei pe muchea Octaedrului, şi în fine avem:

$$b = 45^0 + \langle 180^0 - \alpha \rangle. \text{ şi deci: } m = \operatorname{tg} b.$$

Pentru a găsi pe n, ne raportăm la triunghiul ⟨1⟩ în care cunoaştem pe $\frac{Y}{2}$ şi b şi putem deduce pe a:

$$\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} \frac{Y}{2} \text{ sau: } n = \operatorname{tg} a.$$

III. Se dau V şi Ξ. Conducem calculul în acelaş mod cu această diferenţă că, în triunghiul ⟨3⟩ înlocuim $\frac{Y}{2}$ prin $\frac{V}{2}$; atunci: $45^0 + \langle 180^0 - \alpha \rangle$ reprezintă înclinarea muchei V pe axă, adică pe a. Se deduce mai întâi valoarea lui n şi apoi în triunghiul ⟨1⟩ avem:

$$\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} \frac{V}{2} \quad \text{şi} \quad m = \operatorname{tg} b.$$

— Pentru projecţiuni, calculele prezintă de asemenea trei cazuri:

I. Se dau Y şi V şi se caută să determinăm faţa b a cărei ecuaţie este ⟨Fig. 154⟩:

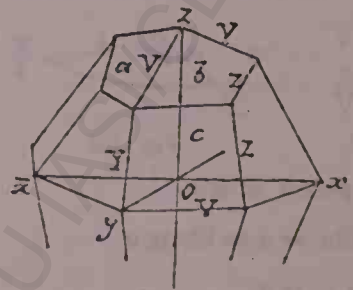


Fig. 154

$$m \cos bx - n \cos by = \cos bz,$$

de unde:

$$m = \frac{\cos bz}{\cos bx} \text{ şi } n = \frac{\cos bz}{\cos by}.$$

In figura 155 avem: $ab = 180^0 - V$ şi $bf = 180 - Y$. Atunci

$$bc = 90^0 - \frac{V}{2} \text{ şi } bg = 90^0 - \frac{Y}{2}$$

In triunghiul sferic dreptunghic bez avem :

$$\sin be = \sin bz \sin ezb.$$

şi dacă punem : $ezb = z$,

avem : $\sin be = \sin bz \sin z.$

In triunghiul bzg, vom ave :

$$\sin bg = \sin bz \cos z.$$

Impărţind ambele egalităţi ne vine :

$$\frac{\sin bc}{\sin bg} = tg\ \alpha = \frac{\cos \frac{V}{2}}{\cos \frac{V}{2}}.$$

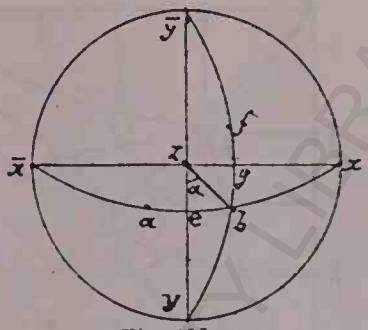


Fig. 155

Insă din prima ecvaţie deducem :

$$\sin bz\, \varrho = \frac{\sin bc}{\sin \alpha} = \frac{\cos \frac{V}{2}}{\sin \alpha}.$$

Triunghiurile sferice byz şi bxz ne dau :

$$\cos by = \sin bz \cos \alpha \quad \text{şi}$$

$$\cos bx = \sin bz \sin \alpha.$$

Atunci : $m = \frac{\cos bz}{\cos bx} = \frac{\cos bz}{\sin bz \sin \alpha} = \frac{\cot g\ bz}{\sin \alpha}$ şi

$$n = \frac{\cos bz}{\cos by} = \frac{\cos bz}{\sin bz \cos \alpha} = \frac{\cot g\ bz}{\cos \alpha}.$$

II. Se dau : V şi Ξ. Faţa b este determinată prin ecvaţia :

$$m \cos bx = n \cos by = \cos bz.$$

De unde : $m = \frac{\cos bz}{\cos by}$ şi $n = \frac{\cos bz}{\cos by}$.

Avem : $bg = 90^0 - \frac{V}{2}$ şi $bd = bc = cd = 180^0 - z$ (Fig. 156),

Să împărţim în 2 părţi egale pe bd şi bc şi prin mijlocul lor c şi f să ducem cercurile mari, perpendiculare pe bd şi bc, care se taie în punctul O, care este proiecţia polului feţei Octaedrului. Să unim pe O şi b cu z. Ştim că :

$$Oz = 54^0 44' 8''.$$

Insă : $bd = bc = cd = 180^0 - \Xi$. Şi dacă punem : $cbO = Obd = \alpha$, vom ave în triunghiul bcd :

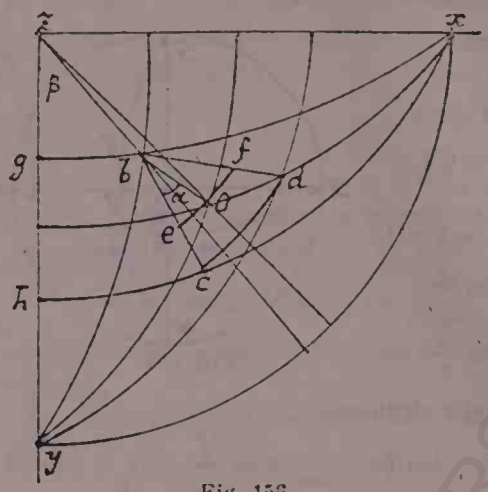


Fig. 156

$$\sin \alpha = \frac{\sin cbd}{2} = \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\Xi}{2}}{\sin^2 \Xi}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\Xi}{2}}$$

Sau : $\sin \alpha = \frac{\cos 60^0}{\sin \frac{\Xi}{2}}$.

In triunghiul sferic bof, dreptunghic în f, avem :

$\cos bof = \sin \alpha \sin \frac{\Xi}{2}$

sau : $\cos bof = \frac{\cos 60^0}{\sin \frac{\Xi}{2}} \sin \frac{\Xi}{2}$

sau $\cos bof = \cos 60^0$. Deci : $bof = 60^0$.

In acelaş triunghiu avem :

$\cos \frac{\Xi}{2} = \sin 60^0 \sin bO$. de unde : $\sin bO = \frac{\cos \frac{\Xi}{2}}{\sin 60^0}$

Şi fiind că în O avem polul Octaedrului, avem :

$$Ozy \quad 45^0$$

In triunghiul bOz avem :

$\cos bO = \cos bz \cos bO + \sin bz \sin bO \cos \langle 45^0 - \beta \rangle \ldots \langle z \rangle$

In fine, în triunghiul sferic dreptunghic bgz avem :

$\sin bg = \sin bz \sin \beta$ sau $\cos \frac{V}{2} = \sin bz \sin \beta \ldots \langle \beta \rangle$

Observăm că : egalităţile (α) şi (β), au ca necunoscute pe bz şi β. Pentru a le determina, considerăm egalitatea $\langle z \rangle$ în care desvoltăm $\cos \langle 45^0 - \beta \rangle$ şi avem :

$\cos bO = \cos bz \cos zO + \sin bz \sin zO \cos 45^0 \langle \cos \beta + \sin \beta \rangle$.

Insă egalitatea (β) ne dă :

$$\sin \beta = \frac{\cos \frac{V}{2}}{\sin bz}$$

Şi fiindcă: $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$, rezultă:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{V}{2}}{\sin^2 bz}}. \quad \text{Atunci:}$$

$$\cos bO = \cos bz \cos zO + \sin bz \sin zO \cos 45^0.$$

$$\cdot \left[\sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{V}{2}}{\sin^2 bz}} + \frac{\cos \frac{V}{2}}{\sin bz} \right]$$

sau: $\cos bO = \cos bz \cos zO + \sin zO \cos 45^0.$

$$\cdot \left[\sqrt{\sin^2 bz - \cos^2 \frac{V}{2}} + \cos \frac{V}{2} \right]$$

sau: $$\frac{\cos bO}{\sin zO \cos 45^0} - \cos \frac{V}{2} - \frac{\cos bz \operatorname{cotg} zO}{\cos 45^0} =$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 bz - \cos^2 \frac{V}{2}}$$

Insă: $Oz = 54^0 44' 8''$. Deci: $\frac{\operatorname{cotg} Oz}{\cos 45^0} = 1$ şi $\frac{1}{\sin zO \cos 45^0} = \operatorname{tg} 60^0$

Deci: $\cos bO \operatorname{tg} 60^0 - \cos \frac{V}{2} - \cos bz = \sqrt{1 - \cos^2 bz - \cos^2 \frac{V}{2}}.$

Pentru a prescurta calculele să punem:

$$\cos bO \operatorname{tg} 60^0 - \cos \frac{V}{2} = \varphi.$$

Inlocuind această valoare în ecvaţia precedentă, făcând reducerele şi rădicând la patrat, ne rămâne:

$$\cos^2 bz - \varphi \cos bz = \frac{\sin^2 \frac{V}{2}}{2} - \frac{\varphi^2}{2}.$$

In triunghiul sferic dreptunghic bgz, avem:

$$\cos bz = \cos gz \sin \frac{V}{2}.$$

Inlocuind această valoare a lui $\cos bz$ în ecvaţia precedentă, vom ave:

$$\cos^2 gz - \varphi \frac{\cos gz}{\sin \frac{V}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\varphi^2}{2 \sin^2 \frac{V}{2}}, \text{ de unde:}$$

$$\left(\cos gz - \frac{\varphi}{2 \sin \frac{V}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2 \sin^2 \frac{V}{2}}\right)$$

Dacă punem: $\frac{\varphi}{\sqrt{2} \sin \frac{V}{2}} = \cos \gamma$ rezultă:

$$\left(\cos gz - \frac{\varphi}{2 \sin \frac{V}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos^2 \gamma\right) = \frac{1}{2} \sin^2 \gamma$$

Deci: $\cos gz = \frac{\cos \gamma}{1\sqrt{2}} = \frac{\sin \gamma}{1\sqrt{2}}$ sau:

$$\cos gz = \cos \langle 45^0 - \gamma \rangle \quad \text{şi}$$
$$\sin gz = \sin \langle 45^0 - \gamma \rangle.$$

Atunci: $\cos bz = \cos \langle 45^0 - \gamma \rangle \sin \frac{V}{2}$

In fine: în triunghiul sferic dreptunghic bgy avem:

$$\cos by = \sin \frac{V}{2} \sin gz.$$

De asemenea avem: $bx = 90^0 - by = \frac{V}{2}$.

Atunci valorile lui m şi n devin:

$$m = \frac{\cos bz}{\cos bx} = \frac{\cos \langle 45^0 - \gamma \rangle \sin \frac{V}{2}}{\cos \frac{V}{2}} = \cos \langle 45^0 - \gamma \rangle \operatorname{tg} \frac{V}{2}$$

$$n = \frac{\cos bz}{\cos by} = \frac{\cos \langle 45^0 - \gamma \rangle \sin \frac{V}{2}}{\sin \frac{V}{2} \sin gz} = \frac{\cos \langle 45^0 - \gamma \rangle}{\sin \langle 45^0 - \gamma \rangle} = \operatorname{cotg} \langle 45^0 - \gamma \rangle$$

III. Se da Y şi Ξ. Cătăm indicii feţei c. Ecuaţia sa este:

$$\cos cy = n \cos cx = m \cos cz.$$

Deci: $m = \frac{\cos cy}{\cos cz}$ şi $n = \frac{\cos cy}{\cos cx}$.

Avem: $Oy = 54^0\,44'\,8''$, $O\,y\,z = 45^0$ şi $Oc = Ob$.

Valoarea lui Oc este dată prin:

$$\sin Oc = \frac{\cos \frac{z}{2}}{\sin 60^0}$$

Insă: $he = 90 = \frac{y}{2}$, iar triunghiurile hey şi yOc ne dau:

$$\cos \frac{y}{2} = \sin cy \sin \beta' \quad \text{cu} \quad \beta' = hyc$$

şi: $\cos cO = \cos Oy \cos cy + \sin Oy \sin cy \cos (\beta' - 45^0)$.

Atunci procedăm ca în cazul precepent şi avem:

$$m = \cos (45^0 - \gamma) \operatorname{tg} \frac{y}{2}$$

$$n = \operatorname{cotg} (45^0 - \gamma)$$ împreună cu:

$$\sin cO = \frac{\cos \frac{z}{2}}{\sin 60^0} \text{ şi } \cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} 60^0 \cos Oc - \cos \frac{y}{2}}{1\,\overline{2} \sin \frac{y}{2}}.$$

3. Hemiedrie plagiedră

In acest gen de hemiedrie se suprimă feţele alterne printre acele ce modifică un unghiu, însă se conservă feţele paralele cu acele care au fost suprimate. Această hemiedrie nu poate să se aplice decât feţelor Hexakisoctaedrului, şi se obţine un solid cu 24 feţe, care sunt pentagoane neregulate egale, având două laturi adjacente egale. Acest solid se numeşte *Icositetaedru pentagonal* sau *Giroedru*, de unde s'a luat litera γ pentru notaţiunea acestei hemiedrii. Solidul acesta are: 60 de muchi din care: 24 muchi *d* care formează câte patru, unghiurile O ale Octaedrului; apoi alte 24 muchi f, concurând câte trei la formarea unghiurilor cubului; şi 12 muchi *g* care reunesc muchile d. Unghiurile solide sunt de trei feluri: 6 unghiuri octaedrice O cu 4 feţe, 8 unghiuri

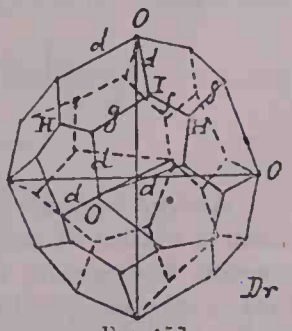


Fig. 157

cubice H cu câte 3 feţe şi alte 24 unghiuri I compuse din câte 3 feţe, deosebite de cele precedente. Sunt două forme: una dreaptă (Fig. 157) şi alta stângă, (Fig. 158) care conservă toate axele de simetrie, dar nu mai au planuri de simetrie, aşa că ambele forme deşi simetrice, nu mai sunt superpozabile.

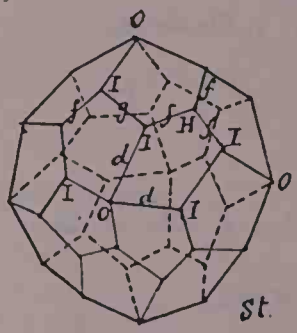


Fig. 158

Notaţiunea e analoagă cu acea a celorlalte hemiedrii ale Hexoctaedrului:

$$+\frac{1}{2}\left(b^{\frac{1}{x}}\, b^{\frac{1}{y}}\, b^{\frac{1}{z}}\right).$$

— După Naumann, pentru a obţine această hemiedrie, plecăm de la Hexakisoctaedru şi considerând piramidele octogonale care corespund extremităţilor axelor cvaternare, desvoltăm feţele alterne, aşa ca la o faţă conservată într'o piramidă să corespundă o faţă adiacentă dispărută în cealaltă piramidă. (Fig. 159). Aşa: în figura alăturată se desvoltă feţele nestriate. — După cum conservăm o serie sau cealaltă de feţe, obţinem solidul drept sau cel stâng. Pentru notaţiunea celor două forme se întrebuinţază literile *d* sau *st*, iniţialele cuvintelor drept sau stâng, pe care le scriem după simbol. Avem astfel:

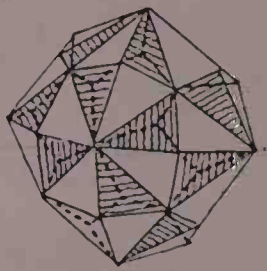


Fig. 159

$$\frac{mOn}{2}\,d \quad \text{şi} \quad \frac{mOn}{2}\,st.$$

După Miller vom ave:

$$\gamma\left(m\,1\,\frac{m}{n}\right) \text{ şi } \gamma\left(m\,\frac{m}{n}\,1\right).$$

4. Tetartoedrie.

Această hemedrie dublă a fost imaginată de către Naumann pentru a explica că scalenoedrul, care este o formă hemiedrică a piramidei dihexagonale, dă naştere la rândul său la forme hemiedrice, şi că romboedrul este şi el o hemiedrie a piramidei hexagonale, hemiedrie la rândul ei a piramidei dihexagonale. Acest gen de hemiedrie nu se aplică decât la sistemul cubic şi hexa-

gonal. Cristalografii francezi nu se ocupă de acest gen de hemiedrie.

După Naumann când se poate aplica unei forme holoedrice succesiv două hemiedrii, forma rezultantă nu mai are decât sfertul elementelor formei holoedrice, de unde s'a dat acestei duble hemedrii, numele de *Tetartoedrie*.

Plecând dar de la Hexakisoctaedru, se obţin prin o primă

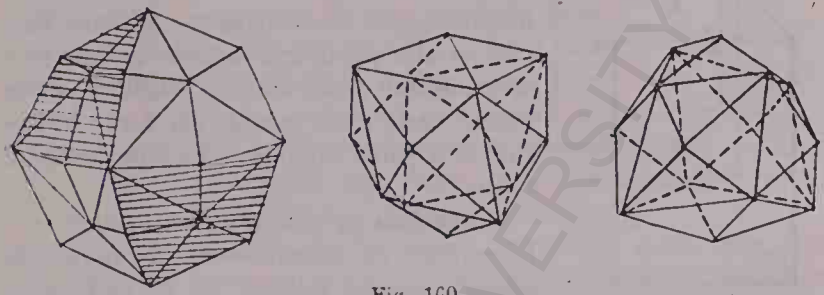


Fig. 160

hemiedrie, doi hexatetraedri (Fig. 160). Dacă aplicăm acestor două solide o nouă hemiedrie, (Fig. 161) căpătăm în total 4 forme, care se numesc: *Dodecaedre pentagonale tetraedrice*. Fiecare formă

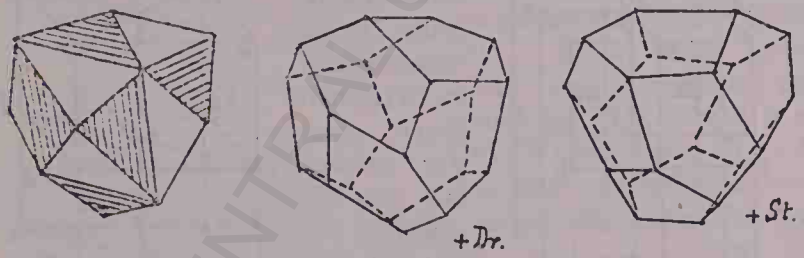


Fig. 161

are: 12 feţe care sunt nişte pentagoane neregulate, 30 de muchi şi 20 unghiuri solide.

Notaţiunea lor după Naumann este:

$$+\frac{m\,O\,n}{+}d,\ +\frac{m\,O\,n}{+}st,\ -\frac{m\,O\,n}{+}d,\ -\frac{m\,O\,n}{+}st.$$

Iar după Miller vom ave:

$$z\,a\left(m\,1\,\frac{m}{m}\right)\ z\,a\left(\frac{m}{n}\,1\,m\right)\ z\,a\left(\frac{m}{n}\,\bar{1}\,n\right)\ z\,a\left(m\,\bar{1}\,\frac{m}{n}\right).$$

Feţele acestor solide nu se găsesc nici odată pe cristali de minerale naturale; ele au fost găsite de către *Scacchi*, *Baum-*

Bauer şi *Lewis*, pe cristali artificiali, preparaţi în condiţiuni determinate, de azotat de bariu şi de azotat de plumb.

II.

Sistemul patratic.

După Levy, forma primitivă a acestui sistem este: *Prisma dreaptă cu bază de patrat*, care are 6 feţe din care: două baze *p* care sunt patrate, şi alte patru feţe laterale *m* care sunt dreptunghiuri; mai are: 8 unghiuri solide triedre egale *a*, 12 muchi din care: 8 bazice *b* şi patru laterale *h*, formate de diedre drepte.

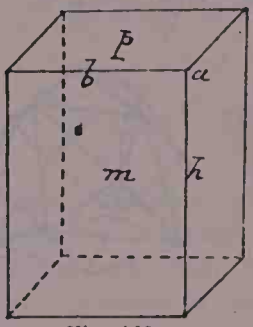


Fig. 162

Notaţiunea sa generală este: *mp*.

Elementele de simetrie sunt: *2 planuri de simetrie binară* ABCD şi EFGH, care trec prin mijlocurile muchilor bazice opuse, şi *un plan de simetrie cvaternară* IKLM care trece prin mijlocurile muchilor laterale opuse. Din intersecţia acestor trei planuri rezultă: *două axe orizontale mm* de *simetrie binară* şi *o axă verticală pp*, de *simetrie cvaternară*. Toate trei aceste axe sunt perpendiculare între ele, unesc mijlocurile feţelor opuse ale prizmei şi se întrunesc în punctul O, care este: *centrul de simetrie*.

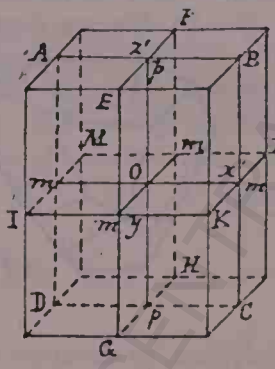


Fig. 63

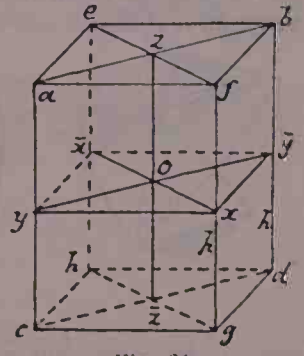


Fig. 64

Dacă prin muchile laterale opuse deducem câte un plan, vom obţine încă: *două planuri de simetrie binară* de a doua specie, *abcd* şi *efgh*, care prin intersecţia lor cu planul de simetrie cvaternară vor da încă: *două axe de simetrie binară, de a doua specie h h* care vor uni mijlocurile muchilor laterale opuse.

Elementele de simetrie a sistemului patratic sunt:

$4P^1$, $_2P^2$, $_2P'^2$, C, L^1, $_2L^2$, $_2L'^2$.

— Naumann caracterizează acest sistem, pe care-l numeşte *Tetragonal*, prin trei axe dreptunghiulare din care: două axe egale, care sunt *axele laterale* situate într'un plan orizontal şi a treia diferită şi verticală, care se numeşte *axa principală*, perpendiculară pe planul celorlalte două. Bisectriţele unghiurilor formate de axele laterale, se numesc *axe intermediare*. Planul care trece prin axa principală şi una din axele laterale, se numeşte: *secţiunea principală*, iar planul care trece prin axele laterale se numeşte *bază*.

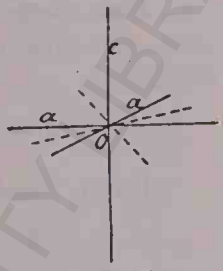


Fig. 165

Fiind că axele nu sunt toate egale, parametrii lor vor fi: *a* pentru axele laterale şi *c* pentru axa principală.

Axele laterale a lui Naumann coincid cu axele de a doua specie a lui Levy şi fiindcă Miller admite axele lui Naumann, trebue să căutăm formulele de trecere de la un sistem la altul. Fie $x\,\bar{x}$ şi $y\,\bar{y}$ axele lui Miller şi $x'\,\bar{x}'$ şi $y'\,\bar{y}'$ axele lui Levy. Dacă OA şi OB sunt valorile parametrilor q şi r şi OC OD a lui q' şi r', având $s = s'$, atunci, construind patratele pe OA şi OB şi pe OA' şi OB, vedem că: OC este diagonala patratului construit pe OA şi OB, deci, conform regulei paralelogramului vom avea:

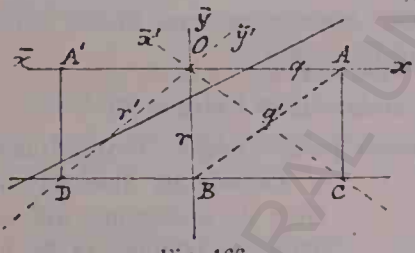


Fig. 166

$$q' = q + r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \langle 1 \rangle.$$

Insă OB poate fi considerat ca diagonala paralelogramului construit pe OA şi OD, deci vom avea:

$$r = q + r'$$

de unde:

$$r' = r - q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \langle 2 \rangle$$

Adunând egalităţile ⟨1⟩ şi ⟨2⟩ avem:

$$q' + r' = 2r \quad \text{de unde:} \quad r = \frac{q' + r'}{2} \quad . \quad \langle 4 \rangle$$

Scăzând ⟨2⟩ din ⟨1⟩ avem

$$q' - r' = 2q \quad \text{de unde:} \quad q = \frac{q' - r'}{2} \quad . \quad \langle 3 \rangle$$

Deci, pentru a găsi parametrii în raport cu axele lui Miller, când cunoaştem pe acei în raport cu axele lui Levy, întrebuinţăm formulele:

$$q = \frac{q' - r'}{2}, \quad r = \frac{q' + r'}{2} \quad \text{şi} \quad s = s'.$$

Pentru cazul invers avem:

$$q' = q + r, \quad r' = r - q \quad \text{şi} \quad s' = s.$$

— Naumann numeşte *Protoprismă* forma primitivă a lui Levy. Pentru feţele laterale care sunt aplicate pe extremităţile axelor leterale paralel cu axa principală, raportul parametric este:

$$a : a : \infty c$$

Deci notaţiunea: ∞ P.

Transformând parametrii în indici avem:

$\frac{1}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{\infty}$ sau 1 : 1 : o, de unde notaţiunea după Miller: ⟨110⟩ pentru faţa aplicată pe extremităţile x şi y.

Pentru celelalte feţe vom avea: ⟨1$\bar{1}$0⟩ ⟨110⟩ ⟨1̄10⟩.

— Pentru a face proiecţiunea polilor feţelor Protoprizmei, o considerăm înscrisă în sfera de proiecţiune aşa ca axele ei laterale să fie în planul de proiecţie. Observăm atunci că: normalele scoborâte din centru pe feţele prizmei sunt tocmai axele: x', $\bar{x}'$ şi y' $\bar{y}'$, aşa dar polii acestor feţe se vor afla pe circonferinţa cercului de proiecţiune, la extremităţile axelor x $\bar{x}$.

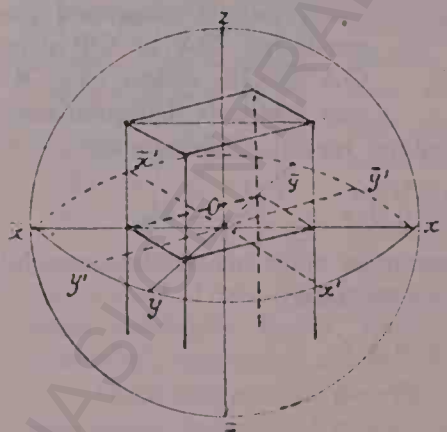


Fig. 167

Deci, pentru a avea proiecţiunea acestor poli, este de ajuns de a construi diametrele de 45° între x $\bar{x}$ şi y $\bar{y}$ şi la extremităţile acestor diamătri se vor găsi proiecţiunele polilor feţelor de prismă.

— Insă prizma lui Levy, conţine şi feţele *p* care sunt bazele; după Naumann aceste feţe se numesc de *Bazipinacoid* şi corespund raportului parametric : $\infty a : \infty a : c$, sau $a : a : 0c$ de unde notaţiunea : 0P.

Pentru a trece la notaţiunea în indici avem :

$$\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{1} \text{ sau } o : o : 1$$

De unde, notaţiunea după Miller : (oo1).

— Este uşor de văzut că, polii feţelor de bazipinacoid se vor projecta în *z*.

— Elementele cristalografice ale Protoprizmei sunt cunoscute şi constante ; nu mai este deci nevoe a le calcula.

Pentru a obţine formele secundare după Levy sau Naumann, vom urma aceiaş metodă ca la sistemul cubic. Vom ave deci două feluri de forme : 1. *Forme holoedrice* şi 2. *Forme hemiedrice.*

I. Forme Holoedrice.

Fiind că numărul elementelor de simetrie a scăzut, modificaţiele prin care vom obţine formele holoedrice vor fi de trei feluri : A. *Pe muchiile bazice*, B. *Pe unghiuri* şi C. *Pe muchiile laterale.*

A. *Modificaţii pe muchiile bazice.* Aici nu avem de făcut de cât o singură modificaţie şi anume : modificaţie simetrică, care ne conduce după Levy, la solidul numit :

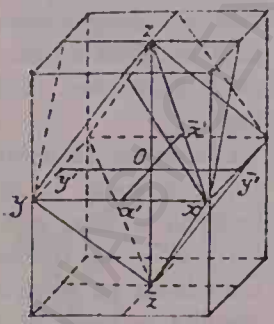


Fig. 168

Octaedrul direct şi care rezultă din Protoprizmă înlocuind muchile bazice prin feţe paralele cu aceste muchi, luând pe cele lalte distanţe proporţionale cu lungimele lor. Simbolul feţelor va fi :

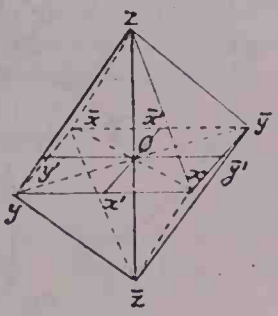


Fig. 169

$$\frac{1}{bx} \quad \frac{1}{bo} \quad \frac{1}{hx}$$

De unde notaţiunea : b^1.

Acest Octaedru are 8 feţe egale care sunt triunghiuri isoscele ; apoi : 6 unghiuri solide, din care 2 culminante şi 4 laterale.

— După Naumann Octaedrul direct se numeşre *Protopiramidă* şi corespunde raportului parametric : a : a : c, deci notaţiunea : P. sau pentru cazul general : a : a : mc, de unde notaţiunea : *mP.*

Aceasta ne arată că sunt mai multe piramide după valoarea lui *m* ; când m < 1, avem piramidele *obtuze* ; când m > 1, piramidele *ascuţite.*

După Miller avem notaţiunea ⟨111⟩, iar pentru cazul general : ⟨mm 1⟩.

Pentru celelalte feţe superioare ale piramidei avem : $(\bar{1}11)$, $\langle 1\bar{1}\,1\rangle$ şi $\langle\bar{1}\bar{1}1\rangle$, sau : $\langle\bar{m}m1\rangle$ $\langle m\bar{m}1\rangle$ $\langle\bar{m}\bar{m}1\rangle$.

Dacă voim a ave notaţia feţelor care formează piramida inferioară, afectăm ultimul indice, care corespunde lui z ; cu semnul — .

— Pentru a face proiecţiunea polilor feţelor Protopiramidei, să considerăm centrul acestei piramide, care este de asemenea şi origina axelor, şi din acest centru cu o rază oare care, să construim sfera de proiecţiune, în care planúl cercului de proiecţiune este planul axelor x şi y. Pentru a găsi proiecţiunea polului feţei xyz, să scoborâm din centrul O perpendiculara Op, pe care o prelungim până ce atinge sfera în punctul P, care este polul feţei.

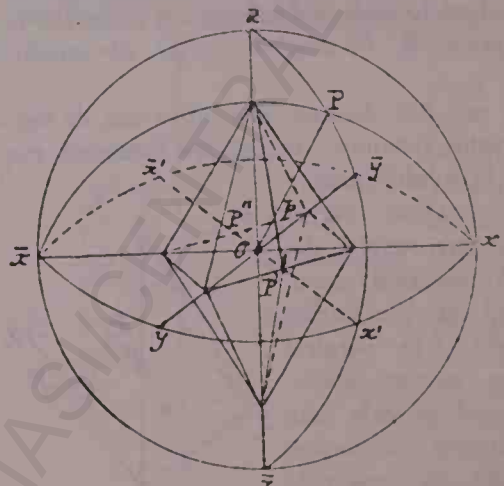


Fig. 170

Observăm că acest pol se găseşte la intersecţia a două cercuri : $zP\bar{z}$ care reprezintă urma pe sferă a planului ce trece prin $z\bar{z}$ şi P şi care tae planul de proiecţiune după bisectricea $x\bar{x}$ a unghiului axelor $x\bar{x}$ şi $y\bar{y}$: şi $xP\bar{x}$, a cărui proiecţiune trebue să o determinăm.

Primul cerc $zP\bar{z}$ fiind normal planului de proiecţiune şi făcând un unghiu de 45^0 cu planul de origină, se projectează după diametrul de 45^0 între x şi y. Pentru a determina projecţiunea cercului $xP\bar{x}$ trebue să determinăm mai întâi inclinarea sa către planul de projecţie; pentru aceasta observăm că, măsurând diedrul xy, găsim unghiul normalelor la feţele ce formează diedrul, luând suplimentul acelui diedru. Insă, planul cercului de projecţie împarte în două părţi egale atât diedrul cât şi unghiul normalelor, aşa că, una din aceste jumătăţi P'OP reprezintă inclinarea cercului $xP\bar{x}$ către planul de projecţie.

Atunci vom rabate cercul $zP\bar{z}$ în jurul lui P'P'': punctul P va cădea pe circonferinţa cercului de projecţiune la o distanţă de la extremitatea diametrului de 45^0 spre x, egală cu jumătatea unghiului normalelor la feţele ce formează dieddrul xy.

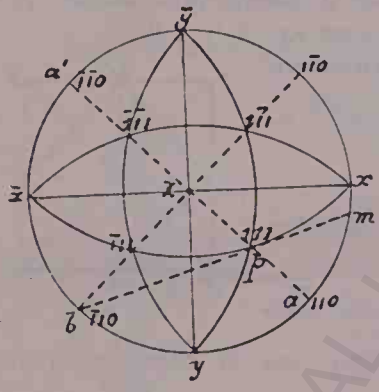


Fig 171

Vom face dar următoarea construcţiune: vom duce diametrele de 45^0 între x şi y şi plecând de la extremitatea *a* a acestui diametru, vom lua arcul *am* egal cu jumătatea unghiului normalelor şi apoi vom uni pe *m* cu *b* unde a venit punctul de vedere, extremitatea diametrului de 45^0 perpendicular pe aa': obţinem atunci cu aa' intersecţia *p*. Prin x p, $\bar{x}$ facem să treacă un cerc mare, care reprezintă projecţia cercului $xP\bar{x}$. Atunci punctul *p* reprezintă projecţia polului P a feţei xyz (111).

In acelaş mod se vor obţine projecţiunele polilor celorlalte feţe.

B) Modificaţii pe unghiuri

Modificaţiele ce putem face pe unghiuri, sunt de două feluri: a) *Modificaţii simetrice* şi b) *Modificaţii disimetrice.*

a) *Modificaţii simetrice.* Se obţine o singură formă care este:

Octaedrul invers, care se obţine înlocuind unghiurile solide ale prizmei tetragonale prin feţe, care să iee pe muchile concurente lungimi proporţionale cu aceste muchi. Se obţine un solid

octaedric, care se numeşte *Octaedrul invers* fiind că e dispus vis-a-vis de axe, în alt mod de cât octaedrul precedent. Simbolul său va fi: $b^{\frac{1}{x}}\ b^{\frac{1}{\bar{x}}}\ b^{\frac{1}{y}}$ sau $a^{\frac{z}{x}}$; şi fiindcă $x = z$ avem: a^1.

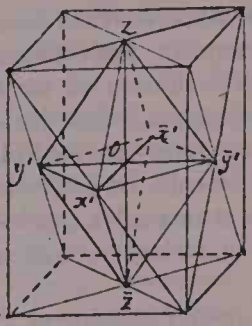


Fig. 172

După Naumann acest Octaedru se numeşte *Deuteropiramidă*, caracterizată prin raportul parametric $\infty a : a : c$.

Ea este dispusă astfel în cât muchile bazice sunt paralele cu axele orizontale ale lui Naumann şi unesc prin urmare extremităţile axelor lui Levy. Notaţiunea sa va fi: $P\,\infty$.

Şi dacă considerăm raportul parametric general $\infty a : na : mc$ sau: $\infty a : a : \frac{m}{n} c$. de unde notaţiunea: $\frac{m}{n} P\,\infty$.

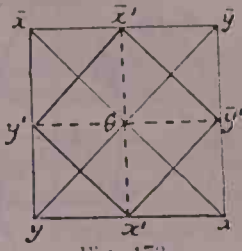


Fig. 173

Pentru a trece la notaţiunea în indici, avem:

$\frac{1}{\infty} : \frac{1}{n} : \frac{1}{m}$ sau $0 : m : n$. De unde notaţiunea generală după Miller: ⟨0mn⟩ sau în cazul notaţiunei simple: ⟨011⟩.

Pentru celelalte feţe notaţiunea va fi:
⟨m0n⟩ sau (101), $(0\bar{m}n)$ sau $(0\bar{1}1)$ şi $(\bar{m}0n)$ sau $(\bar{1}01)$.

— Pentru a obţine proiecţiunea polilor feţelor de Deuteropiramidă procedăm ca pentru Protopiramidă. Insă polii nu se mai găsesc pe diametrele de 45^0 dar pe axele: $x\bar{x}$, $y\bar{y}$.

Pentru a determina poziţiunea lor observăm că polii feţelor de Deuteropiramidă se găsesc: la intersecţia cercului care trece prin $x\bar{x}$ şi polii protopiramidei, cu axa $y\bar{y}$; sau a cercului care trece prin $y\bar{y}$ şi polii protopiramidei, cu axa $x\bar{x}$.

b. Modificaţii disimetrice. Aici avem încă o singură formă care este:

Dioctaedrul, care rezultă prin înlocuirea unghiurilor solide a protopizmei prin 2 feţe, fiecare luând pe cele trei muchi distanţe diferite, aşa că simbolul este: $b^{\frac{1}{x}}\ b^{\frac{1}{y}}\ b^{\frac{1}{z}}$ Se obţine astfeliu

un solid de formă piramidală, având 16 fețe care sunt niște triunghiuri scalene egale: 10 unghiuri solide din care: 2 unghiuri culminante *p* de câte 8 fețe, 4 unghiuri laterale A de câte 4 fețe, și alte 4 unghiuri laterale E, formate de 4 fețe însă diferite de cele întâi. Muchile în număr de 24 sunt de 3 feluri: 8 muchi laterale G, 8 muchi calminante mai lungi D, și altele 8 mai scurte F.

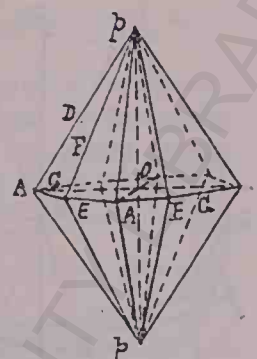


Fig. 174

— După Naumann, acest solid se numește *Piramida ditetragonală*, și corespunde raportului parametric: a : ma : nc

De unde notațiunea: *nPm*.

După Miller avem: $\frac{1}{1} : \frac{1}{m} : \frac{1}{n}$ sau: ⟨mn n m⟩ sau încă: $\left(m\ 1\ \frac{m}{n}\right)$.

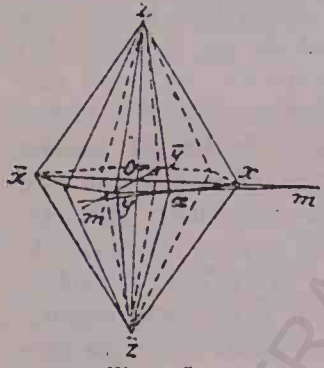


Fig. 175

— Pentru a proiecta polii fețelor piramidei ditetragonale, observăm că: dacă considerăm fețele: zym și zxm', care iau distanțele: Om = m Oy = 1, Oz = 1 și Om' = m, Ox = 1, Oz = 1. aceste fețe au intersecțiunea *za*, care se găsește în planul care trece prin $z\bar{z}$, și axa binară de a doua specie. ⟨Fig. 175⟩. Această muche se va proiecta după *za*, și dacă continuăm în același mod, pentru celelalte fețe, se obțin 8 triunghiuri scalene, căci muchea *za* e mai scurtă. de cât zx sau zy ⟨Fig. 176⟩. Polii acestor fețe se vor proiecta în interiorul acestor triunghiuri; ei se găsesc la intersecția a două cercuri, din care unul trece prin axa $z\bar{z}$ și se proiectează după un diametru al cercului de proiecție, și altul

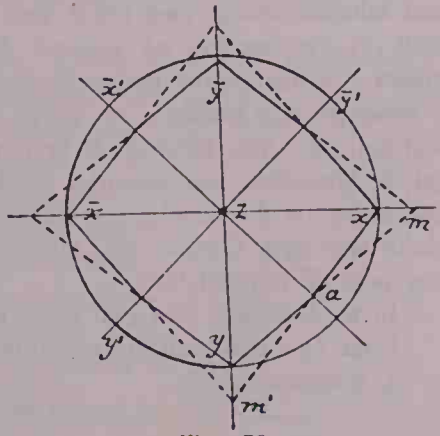


Fig. 176

care trece prin $x\bar{x}$, inclinat către cercul de proiecțiune.

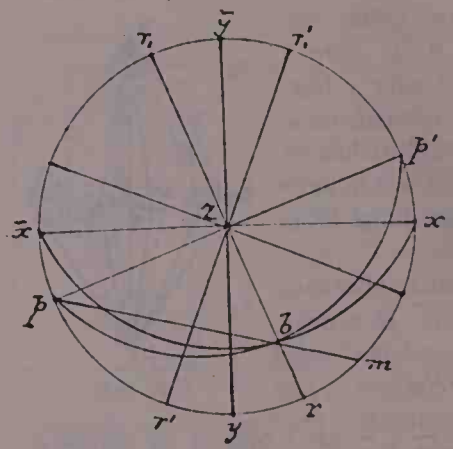


Fig. 177

Dacă considerăm fața zya, observăm că măsurând diedrul zy, suplimentul său va fi unghiul normalelor la fețele zya, și zya', fiind că aceste fețe sunt tot una de inclinate către x și $\bar{x}$, planul zy $\bar{z}$ $\bar{y}$, împarte în două părți egale acest unghiu al normalelor. Una din aceste părți va reprezenta deci unghiul ce face planul ce trece prin $z\bar{z}$ și polul feței, cu planul zy $\bar{z}$ $\bar{y}$. Atunci plecând de la y, (fig 177) luăm la dreapta și la stânga două arcuri *yr* și *yr'* egale cu jumătatea suplimentului diedrului zy, și ducem diametrele rzr_1 și $r'zr_1$, care reprezintă proiecțiunele cercurilor care trec prin $z\bar{z}$ și polii fețelor. Pe aceste diametre, trebue să determinăm punctele unde se proiectează polii fețelor. Să căutăm atunci proiecțiunea cercului care trece prin $x\bar{x}$ și pol, care este inclinat de un unghiu dat către planul de proiecțiune. Măsurăm atunci diedrul *ya*, a cărui supliment ne dă unghiul normalelor la fețele care formează acest diedru, adică: zya și $\bar{z}$ya; și fiind că planul de proiecțiune împarte în două părți egale acest unghiu a normalelor, una din aceste jumătăți va reprezenta înclinarea cercului care trece prin $x\bar{x}$ și pol, către planul de proiecțiune. Deci dacă rabatem cercul care trece prin $x\bar{x}$ și pol, în jurul diametrului rr_1 este evident că punctul de vedere, va veni la extremitatea *p* a diametrului perpendicular, și polul va cădea pe cercul de proiecție la o distanță *rm* egală cu jumătatea suplimentului diedrului *ya*. Deci, plecând de la *r* vom lua spre *x* un arc *rm* egal cu jumătatea suplimentului diedrului *ya* și unind *m* cu *p* vom obține cu diametrul rr_1 intersecția *b* care reprezintă proiecția polului feței zya. Cercul $xb\bar{x}$ reprezintă proiecția cercului care trece prin $x\bar{x}$ și polul feței.

In mod analog vom găsi proiecțiunea polilor celorlalte fețe.

Fața *zya* corespunzînd raportului parametric: ma : a : nc va ave ca notațiune:

(n mn m).

C. Modificaţii pe muchile laterale.

Şi aici avem două feluri de modificaţii : simetrice şi desimetrice.

a) *Modificaţii simetrice.* Această modificaţie ne conduce la : *Prizma inversă,* care se obţine din prizma fundamentală, înlocuind muchile laterale prin o faţă paralelă cu aceaste muchi şi interceptând pe muchile bazice distanţe egale. Simbolul acestor feţe va fi : $b\frac{1}{x}\ b\frac{1}{x}\ h\frac{1}{o}$ iar notaţia : h^1

Fiind că sunt patru muchi, vom obţine 4 feţe, care vor forma prizma inversă, corespunzînd Octaedrului invers. Aici axele secundare unesc mijlocurile muchilor laterale opuse. ⟨Fig. 178⟩.

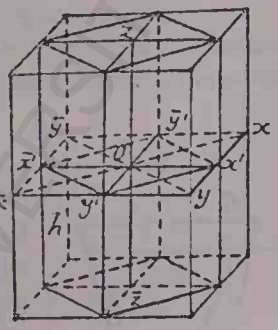


Fig. 178

— După Naumann, această prizmă se numeşte : *Deuteroprizmă* şi corespunde raportului parametric : a : ∞a : ∞c de unde notaţia : $\infty P\infty$. Pentru notaţia în indici vom ave :

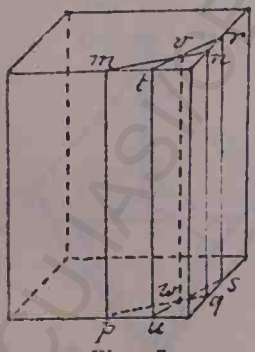
$$\frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty}$$

sau după Miller : (100).

— Proiecţiunea polilor feţelor Deuteroprizmei este simplă. Polii se găsesc la extremităţile axelor binare de prima specie, adică : în *x* se proiectează faţa (100), în y faţa ⟨010⟩ în $\overline{x}$ ⟨$\overline{1}$00⟩ în $\overline{y}$ ⟨0 $\overline{1}$ 0⟩.

— Nu e nevoe de calculat elementele deuteoprizmei, care sunt cunoscute.

b) *Modificaţii disimetrice.* Avem o singură modificaţie care ne conduce la : *Prizma Octogonă,* care se obţine, înlocuind muchile laterale prin câte două feţe ce nu sunt egal inclinate. Aşa : planul *mmpq* paralel cu muchea *h*, ia pe o muche bazică o distanţă $\frac{1}{m}$ b şi pe cea-


Fig, 179

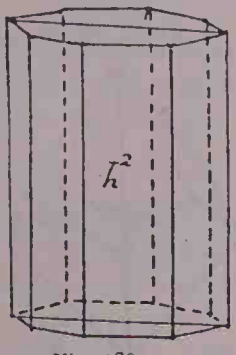


Fig. 180

laltă o distanţă $\frac{1}{n}$ b. Trebue un alt plan *rstu*, care ia pe prima muche distanţa $\frac{1}{n}$ b, iar pe a doua $\frac{1}{m}$ b (Fig. 179). Se obţine astfel o prizmă care are ca bază un octogon simetric, dar nu regulat. (Fig. 180).

Simbolul este: $b\frac{1}{n}\, b\frac{1}{m}\, h\frac{1}{\infty}$ şi notaţiunea $h^{\frac{m}{n}}$.

— După Naumann acest solid se numeşte: *Prizma ditetragonală* şi corespunde raportului parametric: a : na : ∞c. Notaţiunea este: ∞P_{II}. După Miller: $\frac{1}{1} : \frac{1}{n} : \frac{1}{\infty}$ sau (n10).

— Polii feţelor prizmei ditetragonale se găsesc proiectaţi pe circonferenţa cercului de proiecţiune la extremitatea diametrelor corespunzetoare feţelor piramidei ditetragonale.

II. Forme hemiedrice.

A. Dacă înlocuim muchile bazice alterne ale unei prizme patratice prin câte o faţă obţinem un tetraedru cu feţele de triunghiuri isoscele, şi care se chiamă *Sfenoedru*. Notaţiunea celor două sfenoedre va fi: Fig. 181, 182).

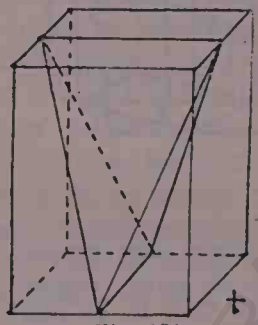


Fig. 181

$$\pm \frac{1}{2} b^1.$$

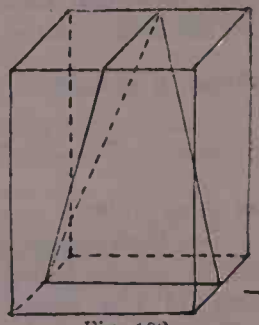


Fig. 182

— După Naumann Sfenoedrul se obţine prin desvoltarea feţelor alterne ale Octaedrului direct aşa că, notaţiunea sa va fi:

$$\pm \frac{m\,P}{2}.$$

După Miller avem notaţiunea: z (m m 1) şi z (m $\bar{m}$ 1).

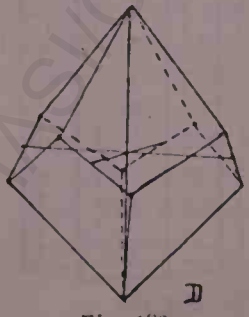


Fig. 183

B. Dacă în prizma patratică înlocuim unghiurile solide prin câte două feţe şi lăsăm să se desvolte feţele alterne, obţinem un solid cu 8 feţe trapezoidale care se tae după un octogon în zig-zag. (Fig. 183, 184).

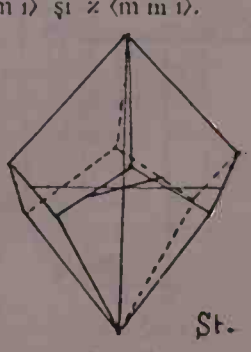


Fig. 184

Sunt două solide: unul pozitiv şi altul negativ, care se numesc *Hemidioctaedre* şi au ca notaţie: $\pm \frac{1}{2}\left(b^{\frac{1}{x}}\, b^{\frac{1}{y}}\, b^{\frac{1}{z}}\right)$.

Pentru a obţine aceste solide după Naumann, vom considera piramida ditetragonală, în care facem să se desvolte feţele alterne, în piramidele de sus şi jos. ⟨Fig. 185⟩. Astfel: feţele *a* şi *b* a piramidei superioare se tae după muchea *zp*, iar cu feţele *c* şi *d* a piramidei inferioare se tae după muchile în zig-zag: *pq*, *pr*, şi *rs*, care trec prin vârfurile octogonului de bază. Se obţine astfel solidul numit de către Naumann *Trapezoedru tetragonal*. Sunt două solide: unul *drept* şi altul stâng, a căror notaţiune este:

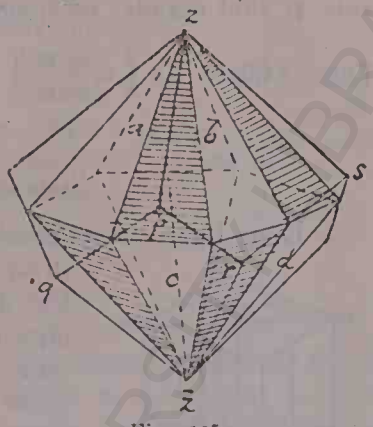


Fig. 185

$$\frac{nPm}{2}\, d \text{ şi } \frac{nPm}{2}\, st.$$

După Miller: $a\left(m\ 1\ \frac{m}{n}\right)$ şi $a\left(m\ -1\ \frac{m}{n}\right)$.

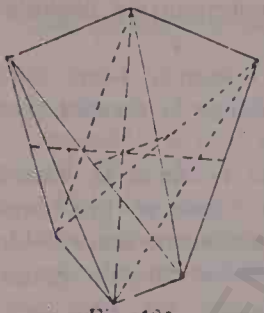


Fig. 186

c) Dacă înlocuim unghiurile alterne ale prizmei patratice prin câte două feţe se obţine un solid cu 8 feţe, care sunt triunghiuri scalene, având forma unui sfenoedru a cărui feţe au fost împărţite în două părţi: pentru aceasta se numeşte *Disfenoedru*. Sunt două solide, unul pozitiv, altul negativ ⟨Fig. 186, 187⟩ a căror notaţiune e

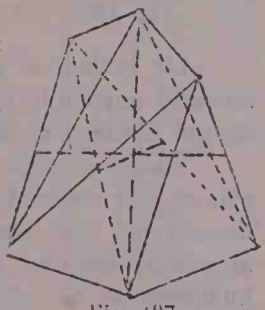


Fig. 187

$$\pm \frac{1}{2}\left(b^{\frac{1}{x}} b^{\frac{1}{y}} b^{\frac{1}{z}}\right).$$

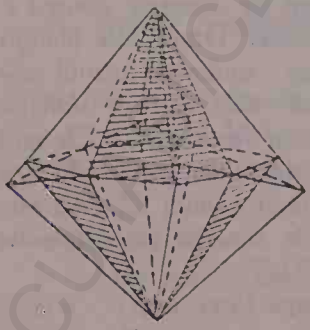


Fig. 188

Pentru a obţine acest solid după Naumann, plecăm direct de la piramida ditetragonală, desvoltând părechi alterne de feţe din piramida superioară şi cea inferioară. ⟨Fig. 188⟩. Else numeşte: *Sca-*

Icnoedru tetragonal, şi fiind că sunt două de aceste solide, unul pozitiv şi altul negativ, notaţiunea generală va fi: $\pm \frac{nPm}{2}$.

După Miller: $\varkappa \left(m : \frac{m}{n} \right)$ şi $\varkappa \left(m : -\frac{m}{n} \right)$.

III.

Sistemul Ortorombic.

După Levy, forma primitivă a acestui sistem este: *Prizma dreaptă cu bază de romb.*, care are 6 feţe din care: două baze *p* care sunt nişte romburi, şi 4 feţe laterale, care sunt nişte dreptunghiuri, notate *m*. Unghiurile solide în număr de 8 sunt de două specii: 4 unghiuri *a* corespunzind muchilor laterale obtuze. şi 4 unghiuri *e* corespunzind muchilor ascuţite. Muchile în număr de 12 sunt de trei feluri: 8 muchi orizontale *b* egale, 2 muchi verticale *h* corespunzind diedrelor obtuze, şi două muchi verticale *g*, corespunzind diedrelor ascuţite. (Fig. 189).

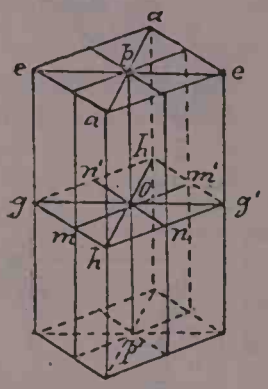


Fig. 189

De ordinar se aşează prizma aşa ca, diagonala bazei care reuneşte unghiurile *e* să fie dirijată de la stânga la dreapta şi ca diedrul obtuz *h* să fie în faţă.

Pentru a obţine elementele de simetrie se face să treacă planuri prin mijlocul muchilor bazice opuse, care se taie după dreapta *pp'* care este *axa principală* şi de *simetrie binară*. Un al treilea plan care trece prin mijlocul muchilor laterale opuse, întâlneşte pe cele două d'intâi după dreptele *mm'*, *nn'*, care unesc mijlocurile feţelor opuse, aceste axe sunt de *simetrie binară* şi se numesc *axe secundare de prima specie*. Două alte planuri care trec prin două muchi laterale opuse, întâlnesc planul orizontal după două drepte *gg'* şi *hh'*, care sunt axe de simetrie binară şi se numesc: *axe secundare de a doua specie* Ele sunt bisectriţele unghiurilor formate de axele de prima specie. In fine toate aceste axe se întâlnesc întru'un punct comun *C*, care este *centrul de simetrie*. Deci: elementele de simetrie ale sistemului ortorombic sunt: $P, P', P'', C, L^2 L'^2 L''^2$.

Notaţiunea prizmei ortorombice după Levy este: *p m*.

— Naumann, pentru a defini acest sistem, pe care-l numeşte *Rombic* admite trei axe, ⟨Fig. 190⟩ din care : una verticală $z\bar{z}$, pe care o numeşte : *axa principală* şi două axe orizontale dreptunghiulare între ele şi în raport cu axa principală, însă neegale : cea mai mare : $x\bar{x}$ se numeşte *macrodiagonală*, şi corespunde diagonalei mari a rombului de bază a prizmei ortorombice, şi alta mai mică : $y\bar{y}$ numită *brahidiagonală* şi corespunde cu diagonala mică a bazei.

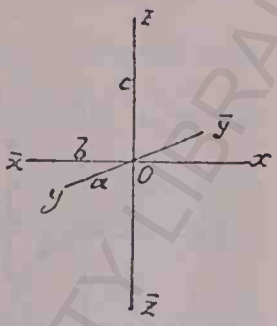


Fig. 190

Aceste axe corespund cu axele secundare de a doua specie a lui Levy. Parametrii corespunzetori acestor trei axe sunt toţi trei diferiţi şi sunt notaţi : *a* pentru brahidiagonală, *b* pentru macrodiagonală şi *c* pentru axa principală. ⟨Fig, 191⟩ Raportul parametric corespunzetor prizmei rombice, pe care Naumann o numeşte *Protoprizmă*, este :

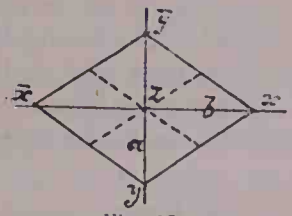


Fig 191

$$a : b : \infty c$$

care conduce la notaţiunea

$$\infty P.$$

Feţele protoprizmei ating axele laterale la extremităţi şi sunt paralele cu axa principală. ⟨Fig. 192⟩.

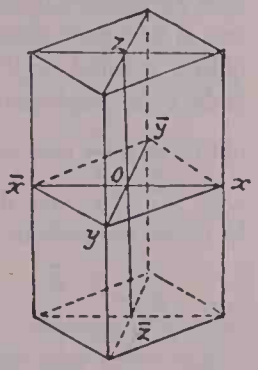


Fig. 192

Cele două baze ale prizmei, care sunt cele două feţe ale *Bazipinacoidului*, corespund raportului parametric :

$$\infty a : \infty b : c$$

sau, dacă le considerăm trecând prin centru

$$a : b : 0c.$$

ceia ce ne dă notaţiunea : *0P.*

— După Miller, care admite aceleaşi axe ca şi Naumann, vom ave pentru feţele prizmei

$$\frac{1}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} \quad \text{sau} \quad \langle 110 \rangle$$

Iar pentru bazipinacoid : $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{1}$ sau ⟨001⟩.

— Pentru proiecțiunea polilor fețelor diverselor ferme ale sistemului octorombic, considerăm planul de proiecțiune conținând cele două axe orizontale $x\bar{x}$ și $y\bar{y}$, macro- și brahidiagonala, pe când $z\bar{z}$ este diametrul perpendicular pe planul de proiecțiune, și trecând prin centru. Dacă considerăm prisma înscrisă în sfera de proiecțiune, (Fig 193) constatăm că polii fețelor ei se vor găsi pe circonferența cercului de proiecțiune, dar *nu* la extremitățile bisectrițelor unghiurilor axelor. In adevăr, dacă considerăm secțiunea *mnqr* (Fig. 194) care trece prin centrul O al prizmei, și dacă din centru ducem normalele OP și OP' pe fețele *mn* și *mr* care formează diedrul obtuz, unghiul α al acestor normale este suplimentul diedrului obtuz m și $\frac{\alpha}{2}$ este unghiul ce face axa $y\bar{y}$ cu una din normalele la fețele considerate; fiind că unghiul m este mai mare decât 90^0, rezultă că α este mai mic decât 90^0, și $\frac{\alpha}{2}$ decât 45^0. Deci nOP este mai mare ca 45^0 iar OP nu este bisectrița lui yOn. Pentru a obține atunci proiecțiunea acestor poli, (Fig. 195) plecând din y luăm spre x arcul yp egal cu $\frac{\alpha}{2}$ și în p se va afla polul fetei nm a prizmei. Luând la stânga arcul yp' egal cu yp, vom ave în p'

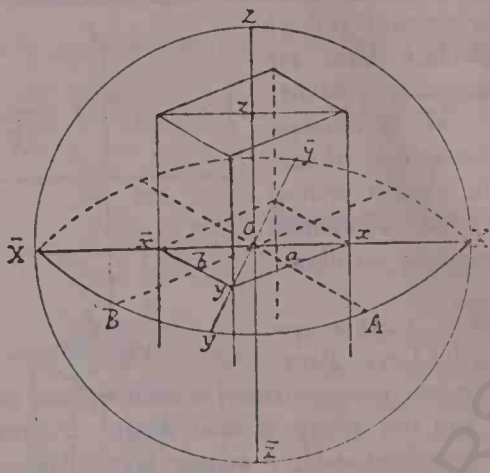


Fig. 193

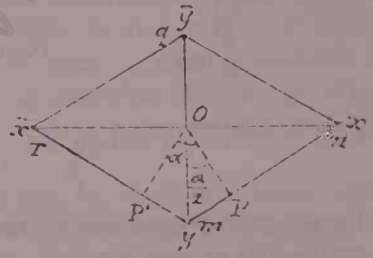


Fig. 194

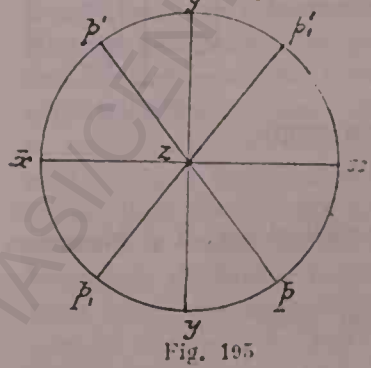


Fig. 195

polul feţei *mr*. Ducând diametrele pp_1 şi $p'p'_1$, vom obţine polii p, p', p_1, p'_1 a celor patru feţe a prizmei.

Este evident că polii feţelor bazipinacordului se proiectează în z.

— Prin modificări asupra elementelor prizmei ortorombice vom obţine: sau forme holoedrice sau forme hemiedrice.

I. Forme holoedrice

Aceste forme se obţin prin mai multe feluri de modificaţiuni.

A. *Modificaţiuni pe muchile bazice*

Aici avem numai modificaţiuni simetrice care ne conduc la:

Octaedrul rombic, care se obţine după Levy înlocuind muchile bazice prin planuri paralele cu aceste muchi şi care iau pe muchile laterale distanţe proporţionale cu lungimile lor. Se obţine un octaedru cu bază de romb, ⟨Fig. 196⟩ care are: 8 feţe ce sunt triunghiuri isoscele egale; 6 unghiuri solide de trei specii, din care 2 culminante *p*, două laterale obtuze *h* şi 2 ascuţite *g*. Muchile în număr de 12 sunt asemenea de 3 specii: 4 muchi orizontale laterale, 4 muchi culminante obtuze şi 4 ascuţite.

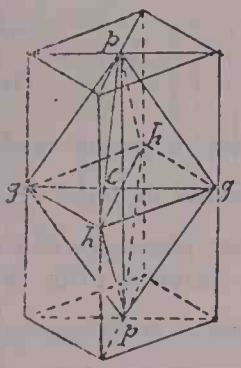


Fig. 196

Simbolul seu este: $b\frac{1}{\infty}b\frac{1}{x}h\frac{1}{x}$ sau b^1.

— După Naumann acest Octaedru se numeşte *Protopiramida*, şi se obţine aplicând planuri care trec prin extremităţile axelor; atunci raportul parametric corespondent va fi:

a : b : c, şi notaţiunea P.

Insă, fiind că lungimea axei principale poate varia, se pot obţine o infinitate de Protopiramide, corespunzătoare raportului parametric general: a : b : mc şi notaţiunei *mP*.

Când $m > 1$, avem piramidele ascuţite, şi pentru $m < 1$, piramide obtuze.

Pentru notaţiunea după Miller vom ave:

$\frac{1}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{1}$ sau ⟨111⟩ şi $\frac{1}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{m}$ sau ⟨mm1⟩.

— Pentru a ave proiecțiunea polilor fețelor Protopiramidei să considerăm acest solid înscris într'o sferă de proiecțiune și să căutăm proiecțiunea polului feței *xyz*. (Fig. 197). Fie OP normala la această față, care atinge sfera în punctul P. Acest punct se găsește la intersecția a două cercuri mari: $zP\overline{z}$ și $xP\overline{x}$. Va trebui dar să determinăm proiecțiunile acestor 2 cercuri. Pentru aceasta observăm că normalele la fețele xyz și $\overline{x}yz$

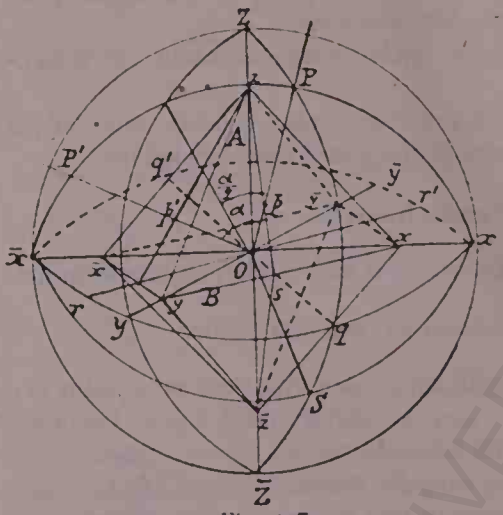


Fig. 197

care determină muchea A, formează unghiul α care este suplimentul diedrului A, și deci $\frac{\alpha}{2}$ va reprezenta unghiul pe care-l face planul cercului $zP\overline{z}$ cu $zy\overline{z}$. Plecând deci de la y, în cercul de proiecțiune, (Fig. 198) vom lua spre *x* arcul $\overset{\frown}{yp} = \frac{\alpha}{2}$ și vom duce diametrul pzp', care reprezintă proiecția cercului $zP\overline{z}$.

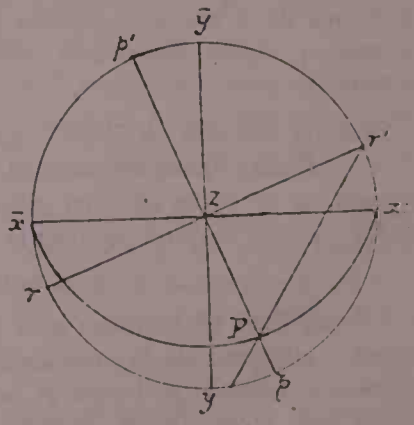


Fig. 198

De asemenea normalele la fețele xyz și $xy\overline{z}$ care formează diedrul B dau unghiul β, care este suplimentul lui B; atunci $\frac{\beta}{2}$ reprezintă unghiul de care normala OP este înclinată către planul de proiecțiune. Dacă rabatem cercul qPzq' în jurul lui qq', punctul de vedere vine în r' extremitatea diametrului *rr'* perpendicular pe *qq'*; iar punctul P se va rabate pe circonferența cercului de proiecție la o distanță $pq = \frac{\beta}{2}$ de la p.

spre y. Deci, în planul de proiecție, plecând de la p spre y, vom lua arcul $pq = \frac{3}{2}$ și unind pe q cu r' vom obține intersecția P cu pp' : prin x, P' și $\overline{x}$ facem să treacă un cerc mare, care reprezintă proiecția lui $xP\overline{x}$, iar punctul P reprezintă proiecția polului fetei : xyz (111).

B. Modificații pe muchile laterale.

Vom ave două feluri de modificații : a) simetrice și b) disimetrice.

a) *Modificații simetrice.* Ele sunt de două feluri :

1) *Modificații pe muchile h.* Inlocuind cele două muchi h prin câte o față paralelă cu ele și care ieu pe muchile bazice corespunzătoare distanțe egale. (Fig. 199). Vom obține deci două fețe, a căror simbol este : $b^{\frac{1}{x}}\, b^{\frac{1}{\overline{x}}}\, h^{\frac{1}{o}}$ și notațiunea : h'.

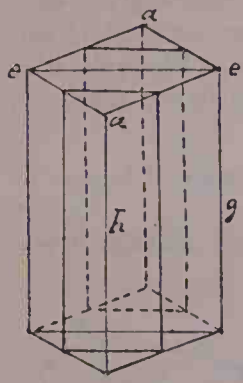


Fig. 199

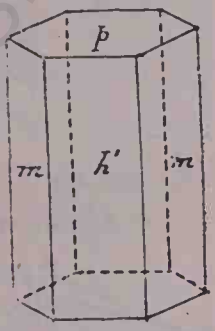


Fig. 200

După Naumann aceste fețe se chiamă fețe de *pinacoizi*; (Fig. 200) ele sunt paralele cu macrodiagonala și corespund raportului parametric.

$$a : \infty b : \infty c$$

au deci notațiunea $\infty P\overline{\infty}$ și se numesc fețe de *Macropinacoid.*

Notațiunea după Miller va fi : $\frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty}$ sau (100).

— Polii fețeior Macropinacoidului se projectează în y și $\overline{y}$, fiind că aceste fețe sunt perpendiculare pe y $\overline{y}$.

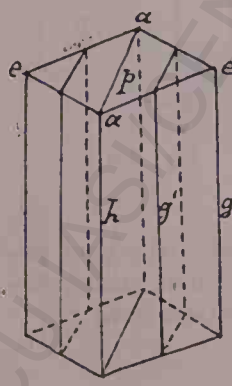


Fig. 201

2. *Modificații pe muchile g.* Aceste modificații ne dau două fețe verticale paralele cu muchile g, (Fig. 201) având ca simbol :

$$b^{\frac{1}{x}}\, b^{\frac{1}{z}}\, g^{\frac{1}{o}}$$

și notațiunea g^1,

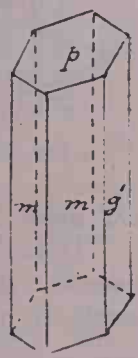


Fig. 202

După Naumann aceste fețe fiind paralele cu brachidiagonala, (Fig. 202)

corespund raportului parametric $\infty a : b : \infty c$, se numesc fețe de *Brahipinacoid* și au ca notațiune $\infty P\breve{\infty}$.

— După Miller avem: $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{1} : \frac{1}{\infty}$ sau ⟨010⟩.

Polii fețelor de Brachipinacoid se projectează în x și $\bar{x}$.

Dacă considerăm în acelaș timp modificațiile pe muchile *h* și *g*, vom obține: *o prizmă dreaptă cu bază de dreptunghiu*, a cărei notațiune va cuprinde pe acea a celor trei pinacoizi: p' h', g'. ⟨Fig 203⟩ — Elementele sale sunt: două baze *p*, două fețe laterale *h'* și alte două fețe laterale *g'*: aceste fețe sunt niște dreptunghiuri; apoi 8 unghiuri solide egale și 12 muchi din care: 4 muchi bazice lungi și 4 muchi laterale.

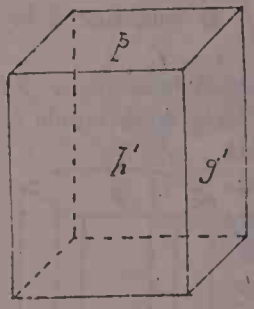


Fig. 203

b. **Modificații disimetrice.** Ele sunt de două feluri:

1) *Modificații pe muchile h.* Să înlocuim muchile *h* prin câte două planuri așa că, fiecare fiind paralel cu *h*, să iee pe o muche bazică o lungime întreagă și pe cealaltă o lungime mai mică. ⟨Fig. 204⟩. Vom înlocui muchea *h* prin 2 fețe, a căror simbol va fi:

$$h^{\frac{1}{v}} b^{1} b^{\frac{1}{m}}$$

și notațiunea: $h^{m.}$

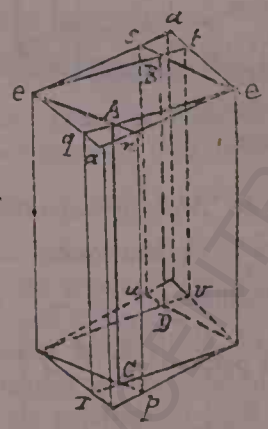


Fig. 204

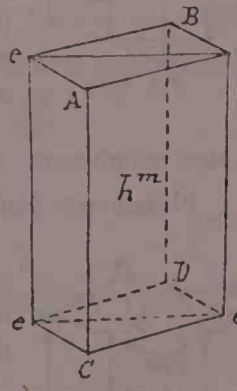


Fig. 205

Se obține astfel: *o prizmă rombică lungită după diagonala mare.* ⟨Fig. 205⟩.

După Naumann această prizmă corespunde raportului parametric: $a : mb : \infty c$ și fiind că este lungită după macrodiagonală, se numește: *Macroprizmă*, a cărei notațiune va fi:

$$\infty P\bar{m}.$$

După Miller: $\frac{1}{1} : \frac{1}{m} : \frac{1}{\infty}$ sau ⟨m10⟩.

— Proiecțiunea polilor fețelor de macroprizmă se va face ca pentru protoprizmă. Însă fiind că fețele ating axa $x\,\bar{x}$ la o distanță mai mare decât unitatea, urmează că, perpendicularele scoborâte din centru pe aceste fețe, vor atinge circonferența cercului de proiecțiune în puncte cuprinse între proiecțiunea polilor fețelor de protoprizmă și polii fețelor de macropinacoid; acești poli vor fi cu atât mai apropiați de acei a macropinacoidului, cu cât prizma va fi mai lungită după macrodiagonală.

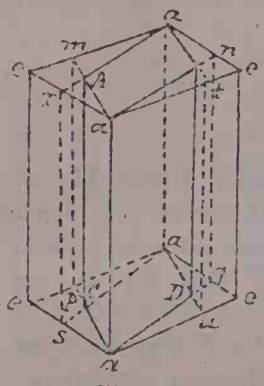


Fig 206

2. *Modificații pe muchile g.* Dacă facem pe muchile g aceleași modificații disimetrice ca pe muchile h (Fig. 206) vom obține *o prizmă rombică lungită după diagonala mică*, (Fig. 207) a cărei simbol este :

$$g^{\infty}\ b^{1}\ b^{\frac{1}{m}}$$

și notațiunea g^{m}.

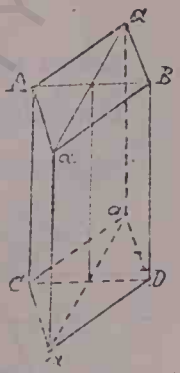


Fig. 207

După Naumann, această prizmă corespunde raportului parametric : ma : b : ∞c, se numește *Brahiprizmă* și are ca notațiune : $\infty P\bar{m}$.

După Miller avem : $\frac{1}{m} : \frac{1}{1} : \frac{1}{\infty}$ sau (1m0).

— Polii fețelor brahiprizmelor se projectează între polii fețelor prizmei și polii fețelor de brahipinacoid.

C. Modificări pe unghiuri

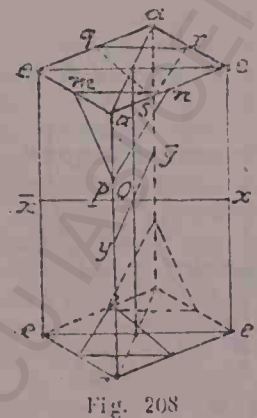


Fig. 208

Vom ave și aici doua feluri de modificări : a) simetrice și b) disimetrice.

a) *Modificări simetrice.* Ele au loc :

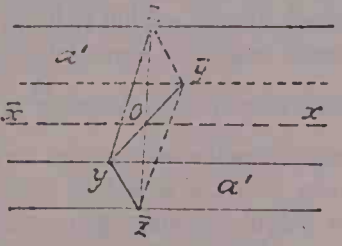


Fig. 209

1) *Pe unghiurile* a. Înlocuim cele 4 unghiuri a ale Protoprizmei prin fețe care iau pe muchile care formează aceste unghiuri, distanțe proporționale cu lungimile

lor. (Fig. 208) Se obţin astfel patru feţe, a căror notaţiune este : $b^{\frac{1}{x}} b^{\frac{1}{x}} h^{\frac{1}{x}}$ sau a^1. Aceste feţe prelungite până la intersecţia lor formează un solid prismatic, deschis la ambele capete, (Fig. 209) a cărui muchi vor fi orizontale şi paralele cu diagonala mare a rombului de bază, care reuneşte unghiurile e. După Levy, acest solid nu are un nume propriu.

După Naumann, aceste feţe corespund raportului parametric a : ∞b : mc şi au ca notaţiune :

$$mP\infty$$

Solidul se numeşte : *Macrodoma.*

După Miller avem : $\frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{m}$ sau (m01).

— Pentru a determina proiecţiunile polilor feţelor Macrodomei, observăm că feţele fiind aplicate pe y şi z paralel cu $x\,\bar{x}$ polii lor se vor proiecta pe $y\,\bar{y}$, între O şi y şi între O şi $\bar{y}$. (Fig. 210) Pentru a determina proiecţiunea lor să considerăm o secţiune în acest solid prin un plan care trece prin $z\,\bar{z}$ şi $y\,\bar{y}$, perpendicular pe macrodiagonal . Această secţiune este un romb. Să măsurăm unghiul $z\,y\,\bar{z}$, a

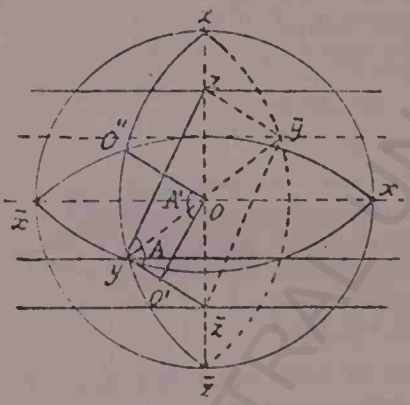


Fig. 210

feţelor macrodomei. Fie A valoarea acestui unghiu şi A' valoarea unghiului normalelor la feţele considerate. Atunci $\frac{A}{2}$ reprezintă înclinarea cercului care trece prin $x\,\bar{x}$ şi pol în raport cu planul cercului de proiecţiune. Dacă rabatem cercul $yz\bar{y}$ în jurul lui $y\bar{y}$, este evident că polul feţei macrodomei se va găsi pe circonferenţa cercului de proiecţiune, în un

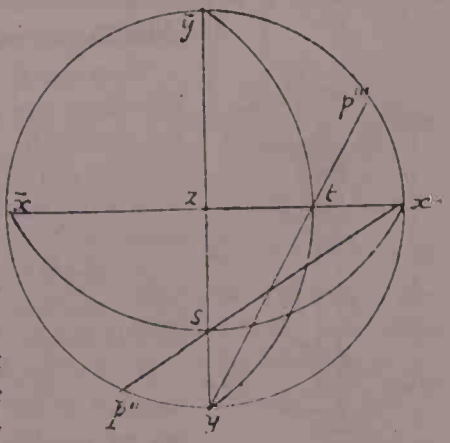


Fig. 211

punct p'' (Fig. 211) la distanța $yp'' = \frac{A}{2}$. punctul de vedere se găsește atunci în x. Dacă unim p'' cu x, vom obține cu $y\,\bar{y}$ o intersecție s, care reprezintă proiecția polului feței de macrodomă.

Fiind că valoarea lui m variază, este evident că: pentru $m > 1$ vom ave macrodome ascuțite și polii lor se vor găsi cuprinși între acei ai macrodomei principale și a micropinacoidului, pe când pentru $m < 1$ vom obține solide obtuze. a căror poli vor fi cuprinși între polii macrodomei principale și bazipinacoid.

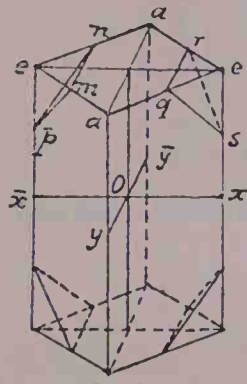


Fig. 212.

2) *Pe unghiurile e.* Dacă facem pe unghiurile *e* aceleași modificații ca și pe unghiurile *a* (Fig. 212) se obține un solid prismatic orizontal a cărui fețe vor fi paralele cu diagonala mică a bazei

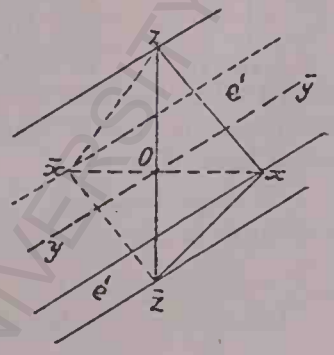


Fig. 213

(Fig. 213) și vor ave ca notațiune: $b^{\frac{1}{x}} b^{\frac{1}{\bar{x}}} g^{\frac{1}{x}}$ sau e^1.

După Naumann solidul corespunde raportului parametric: $\infty a : b : mc$ și prin urmare notațiunea: $mP\breve{\infty}$.

Fiind că fețele sunt paralele cu brahidiagonala, solidul se numește: *Brahidomă.*

După Miller avem: $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{1} : \frac{1}{m}$ sau (0m1).

— Proiecțiunea polilor fețelor brahidomei se face ca și la macrodomă. Ei se găsesc proiectați pe axa $x\,\bar{x}$. Pentru brachidomele ascuțite ei se găsesc cuprinși între acei ai brahidomei principale și ai brahipinacoidului; pentru brahidomele obtuze, între acei ai brahidomei principale și bazipinacoid.

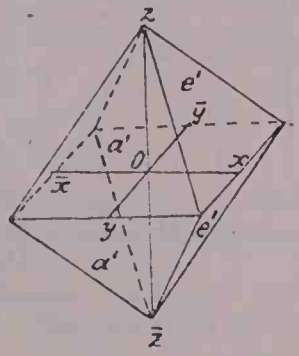


Fig. 214

— Dacă considerăm în același timp modificațiunile pe unghiurile *a* și pe unghiurile *e*, atunci obținem *un octaedru cu bază de dreptunghiu* corespunzetor prizmei cu baza de dreptunghiu. (Fig. 214)

b) *Modificațiuni disimetrice.* Ele pot ave loc:

1) *Pe unghiurile a.* Să considerăm feţele *mne* şi *mpe* care interceptează pe cele 3 muchi distanţe diferite (Fig. 215). Ele vor ave notaţiunea generală : $b\frac{1}{x}b\frac{1}{y}h\frac{1}{z}$ Dacă facem aceastăă modificaţiune pe cele 4 unghiuri *a*, obţinem un solid cu 8 feţe, care este un *Octaedru lungit* în senzul diagonalei mari a bazei (Fig. 216).

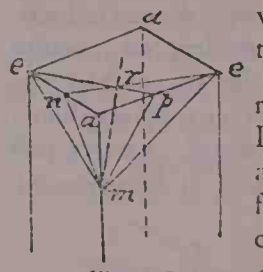


Fig. 215

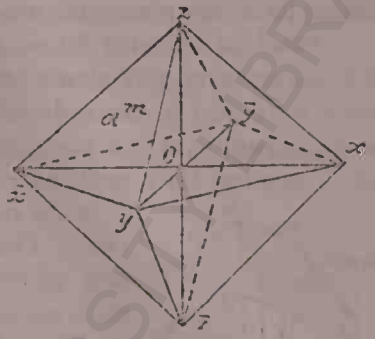


Fig. 216

— După Naumann, aceste Octaedre corespund raportului parametric : a : nb : mc şi se notează :

$$mP\frac{1}{n}$$

Ele se numesc *Macropiramide.*

După Miller avem : $\frac{1}{1} : \frac{1}{n} : \frac{1}{m}$ sau : (mn m, n).

— Pentru proiecţiunea polilor feţelor macropiramidei, întrebuinţăm aceiaş metodă ca şi pentru protopiramide ; însă observăm că aceşti poli se vor projecta pe diametrele cuprinse între $y\frac{1}{y}$ şi diametrul corespunzetor protopiramidei.

2) *Pe unghiurile e.* Dacă facem pe unghiurile *e* aceleaşi modificaţiuni ca şi pe unghiurile *a* (Fig. 217) vom obţine feţele notate :

$b\frac{1}{x}b\frac{1}{y}g\frac{1}{z}$ care vor forma un Octaedru lungit în senzul diagonalei mici a bazei. (Fig. 218).

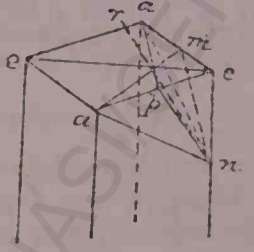


Fig 217

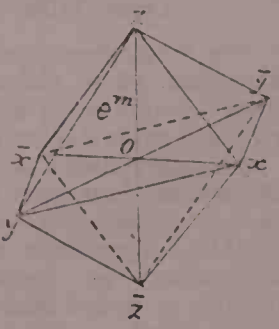


Fig. 218

După Naumann acest Octaedru corespunde raportului parametric : na : b : mc. şi care ca notaţiune : $mP\frac{1}{n}$. Se numeşte *Bratipiramidă.*

BCU IAŞI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

După Miller : $\frac{1}{n} : \frac{1}{1} : \frac{1}{m}$ sau ⟨m mn n⟩.

— Proiecțiunea polilor fețelor brahipiramidelor se va face ca pentru macropiramidă. Acești poli se vor găsi pe diametrele cuprinse între axa $x\,\bar{x}$ și diametrele pe care se găsesc polii protopiramidei.

II. *Forme hemiedrice.*

Formele hemiedrice ale sistemului ortorombic se obțin numai prin modificări pe muchile alterne bazice a prizmei, prin planuri paralele cu aceste muchi. Se obțin astfel două forme care se numesc *Sfenoedre* sau *sfenoizi rombici* din din care unul se numește *direct* sau *drept* ⟨Fig. 219⟩ și altul *invers* sau stâng. ⟨Fig. 220⟩. Ei au patru fețe care sunt triunghiuri scalene. Muchile în număr de 6 sunt de trei specii 2 muchi lungi A, 2 mijlocii B, și două scurte C.

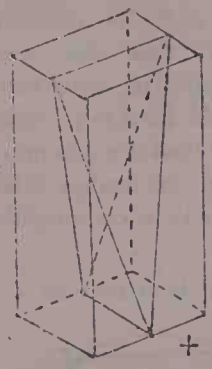


Fig. 219

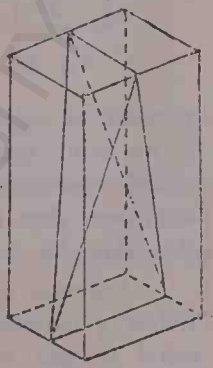


Fig. 220

Notațiunea va fi : $\pm \frac{1}{2} b^m$.

— După Naumann, pentru a obține aceste forme putem pleca de la Protopiramidă precum și de la Brahi sau Macropiramidă, făcând să se desvolte fețele alterne. Vom ave notațiunile :

$$\frac{mP}{2}\ d\quad \frac{mP}{2}\ st,\quad \frac{mP\breve{n}}{2}\ d.\quad \frac{mP\breve{n}}{2}\ st.\quad \frac{mP\bar{n}}{2}\ d.\quad \frac{mP\bar{n}}{2}\ st.$$

Și după Miller avem :

π ⟨mm1⟩, π ⟨m$\bar{m}$1⟩, π ⟨m mn n⟩, π ⟨m$\bar{m}$n⟩, π ⟨mn m n⟩, π ⟨mn $\bar{m}$n⟩.

IV

Sistemul Hexagonal.

După Levy, forma primitivă a acestui sistem este : *Prizma hexagonală*, care are : 2 baze care sunt niște hexagoane regulate

notate p şi 6 feţe laterale m care sunt dreptunghiuri; apoi: 12 unghiuri solide a egale şi 18 muchi din care: 12 muchi bazice b egale şi 6 muchi laterale h (Fig. 221).

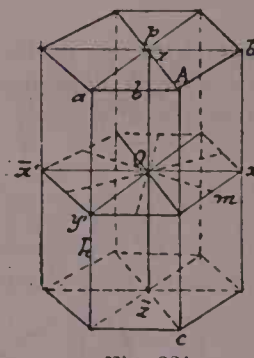


Fig. 221

Dreapta pp', care uneşte mijlocurile bazelor, este o axă de *simetrie senară* şi se numeşte *axa principală*; se obţine prin intersecţia celor trei planuri care trec prin câte două muchi laterale opuse. Dacă prin mijlocurile muchilor laterale, facem să treacă un plan paralel cu baza, el tae pe celelalte trei planuri după trei drepte care sunt: *axe de simetrie binară*. Aceste axe, care sunt paralele cu muchile bazice a prizmei, sunt axele lui Levy; însă el nu ia în consideraţie decât două, care împreună cu axa principală reprezintă cele trei muchi, care compun un unghiu solid al prizmei. Aşa sunt axele: Ox', Oy', şi Oz' paralele cu muchile Aa, Ab, Ac, care formează unghiul A.

Sistemul de 4 axe este admis de Weiss şi Bravais, aşa că trebue 4 parametri, din care: 3 parametri a egali, corespunzând axelor orizontale şi al patrulea c diferit, corespunzind axei verticale. Aceste sunt şi axele lui Levy. Naumann admite de asemenea axele lui Weiss, însă nu consideră decât 3 din care; o axă verticală şi două axe orizontale adjacente. Dacă considerăm planul hexagonului orizontal, atunci axele lui Weiss, Bravais sunt: $x'\bar{x}'$, $y'\bar{y}'$, $z'\bar{z}'$ împreună cu axa verticală care se projectează în O'

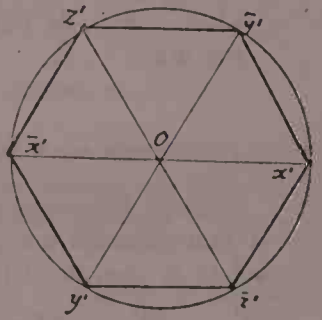


Fig. 222

Naumann numeşte acest solid *Protoprizmă* şi pentru a-l nota, se observă d. ex. că faţa aplicată pe extremităţile axelor x' şi $\bar{z}'$ este paralelă cu axa verticală şi va fi reprezentată prin raportul parametric: a : a : ∞c sau notaţiunea ∞P.

După Weiss această faţă aplicată pe x' şi $\bar{z}'$ este paralelă cu $y'\bar{y}'$ şi cu axa verticală, ceia ce dă raportul parametric: a : ∞a : $\bar{a}$: ∞c. sau trecând la indici: $\frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\bar{1}} : \frac{1}{\infty}$, de unde notaţiunea după Bravais: $\langle 1\,0\,\bar{1}\,0\rangle$.

Dacă observăm valoarea indicilor în notaţiunea lui Bravais, constatăm şi putem demonstra că: *indicele în valoarea absolută corespunzetor lui z, este egal cu suma indicilor precedenţi.* Să considerăm în cazul cel mai general axele: Ox', Oy' Oz' şi să luăm: OA = x' OB = y', OC = z': să construim pe OA şi OB un paralelogram, a cărui diagonală este OC. ⟨Fig. 223⟩. Să presupunem că o faţă tae axele în punctele *a*, *b* şi *c* interceptând distanţele:

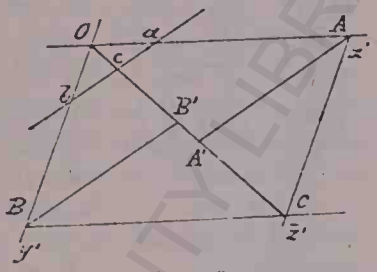


Fig. 223

$$Oa = \frac{OA}{h} \quad Ob = \frac{OB}{k},$$

$$Oc = \frac{OC}{i}, \text{ deci:}$$

$$h = \frac{OA}{Oa} \quad k = \frac{OB}{Ob}, \quad i = \frac{OC}{Oc} \ldots \langle 1 \rangle.$$

Prin punctele A şi B să ducem paralele la urma abc, care vor întâlni pe OC în A' şi B'. Vom ave:

$$OC = OB' + B'C \ldots \langle \alpha \rangle$$

Insă triunghiurile BCB' şi OAA' sunt egale căci au:
OAA' = CBB', AOA' = BCB' aşa că: BC = OA deci vor ave şi OA' = CB'. Inlocuind aceste valori în relaţiunea ⟨α⟩ vom ave: OC = OA' + OB'. Impărţind prin OC avem:

$$\frac{OC}{Oc} = \frac{OA'}{Oc} + \frac{OB'}{Oc} \ldots \langle 2 \rangle$$

Insă avem: $\triangle$ Oca $\sim$ OAA' şi Obc $\sim$ OBB' deci:

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{OA'}{Oc} \text{ şi } \frac{OB}{Ob} = \frac{OB'}{Oc}$$

Inlocuind aceste valori în ⟨2⟩ vom ave:

$$\frac{OC}{Oc} = \frac{OA}{Oa} + \frac{OB}{Ob}$$

Şi înlocuind valorile din egalitatea ⟨1⟩ ne vine:

$$i = h + k.$$

— Dacă în prizma hexagonală facem să treacă planuri prin axa principală şi prin mijlocurile muchilor baziec opuse, obţinem

alte planuri de simetrie, care dau cu planul orizontal, ce trece prin centrul prizmei, trei intersecţiuni, care sunt bisectriţele unghiurilor axelor lui Levy. (Fig. 224) Aceste intersecţii care unesc mijlocurile feţelor laterale opuse a prizmei, constitue un alt sistem de axe binare, care, cu axa principală formează sistemul de axe de a doua specie. Ele sunt notate: $x\bar{x}$, $y\bar{y}$, $z\bar{z}$. Ele corespund cu axele lui Miller de la sistemul romboedric: în raport cu aceste axe putem nota toate formele, după cum vom vede la sistemul romboedric. Miller neadmiţând sistemul hexagonal, nu vom ave a ne ocupa de notaţiunea în sistemul său.

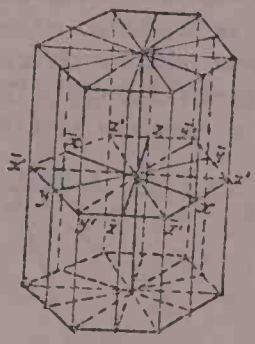


Fig. 224

— Bazele prizmei hexagonale a lui Levy, se numesc după Naumann, feţe de *Bazipinacoid* corespunzând raportului parametric: a : a : ∞c, de unde notaţiunea *0P*. După Weiss avem: ∞a : ∞a : ∞a : c sau în indici: $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{1}$ de unde notaţiunea ⟨0001⟩ după Bravais.

— Pentru proiecţiunea polilor diverselor forme ale sistemului hexagonal, se ia ca plan de proiecţiune, planul cercului mare ce trece prin centrul prizmei hexagonale, care este şi centrul sferei de proiecţiune. (Fig. 225). Atunci axele lui Bravais se proiectează în adevărata lor mărime după: $x'\bar{x}'$ $y'\bar{y}'$, $z'\bar{z}'$, pe când axa principală se proiectează în O. Axele binare de a doua sprecie se proiectează după: $x\bar{x}$, $y\bar{y}$, $z\bar{z}$ şi sunt bisectriţele unghiurilor formate de celelalte axe. Este evident că polii feţelor protoprizmei se proiectează pe circonferinţa cercului de proiecţiune la extremitatea axelor binare de a doua specie. Aşa vom ave polii: $(10\bar{1}0)$ $(01\bar{1}0)$ $(\bar{1}100)$ etc. In O se proiectează polii feţelor de bazipinacoid: ⟨0001⟩.

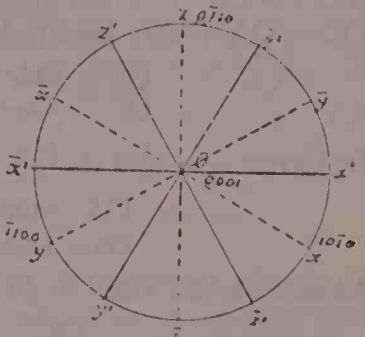


Fig. 225

I. Formele holoedrice

Vom ave a considera la prizma hexagonală două feluri de modificaţiuni: A) pe muchi şi B) pe unghiuri.

A. *Modificaţii pe muchi.* Vom ave două feluri de modificaţii: 1) Pe muchile bazice şi 2) Pe muchile laterale.

1) *Modificaţii pe muchile bazice.* Aceste modificaţii nu sunt de cât simetrice şi ne conduc la solidul care se numeşte: *Dihexaedru*, care se obţine înlocuind fiecare muche bazică a prizmei prin o faţă care, fiind paralelă cu această muche, interceptează pe pe celelalte două distanţe proporţionale cu lungimea lor; aşa

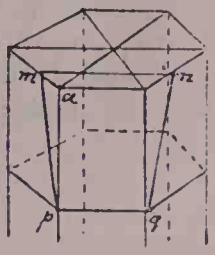


Fig. 226

(Fig. 226) faţa *mnpq*, care ia: $ap = \frac{1}{z}h$, şi $am = an = \frac{1}{y}b$. Simbolul seu va fi: $b^{\frac{1}{o}}\ b^{\frac{1}{y}}\ h^{\frac{1}{z}}$ iar notaţiunea: $b^{\frac{z}{y}}$ sau b^{t}.

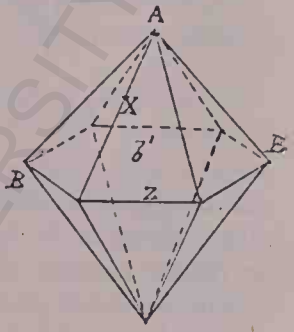


Fig. 227

Fiindcă avem 12 muchi bazice, vom obţine un solid cu 12 feţe, compus din două piramide hexagonale suprapuse pe bazele lor şi care se chiamă *Dihexaedru.* (Fig. 227). Feţele sale sunt nişte triunghiuri isoscele ceia ce a făcut să se dee acestui solid numele de *Isosceloedru*; el are încă: 8 unghiuri solide din care: 2 culminante A şi 6 unghiuri laterale B; apoi 18 muchi din care: 12 culminante X şi 6 laterale Ξ.

— Naumann numeşte acest solid *Protopiramida*, caracterizată prin raportul parametric: a : a : c şi notaţiunea *P*, sau pentru a reprezenta toate protopiramidele: a : a : mc sau *mP*. După Weiss avem: $a : \infty a : \bar{a} : c$ sau în indici: $\frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\bar{1}} : \frac{1}{1}$ sau după Bravais: $(10\bar{1}1)$.

— Pentru a face proiecţiunea polilor feţelor Protopiramidei, să considerăm acest solid înscris în sfera de proiecţiune şi planul cercului de proiecţiune în care ducem axele lui Bravais precum şi axele lui Miller (Fig 228). Să considerăm faţa $x'A\bar{z}'$ şi să căutăm proiecţiunea polului. Normala la această faţă o atinge în punctul *p*

şi dă pe sferă polul P. Acest pol se găseşte la intersecţia a două cercuri mari: APA' şi $x'P\bar{x}'$. Să determinăm proiecţiunele lor. Să măsurăm diedrul $x'\bar{z}' = \Xi$ a cărui supliment α ne dă unghiul normalelor la feţele ce formează acest diedru; atunci $\frac{\alpha}{2}$ este valoarea unghiului pOx adică înclinarea poluluy feţei către planul de proiecţiune. Cercul mare APA' se projectează după diametrul $x\bar{x}$, bisectriţa unghiului

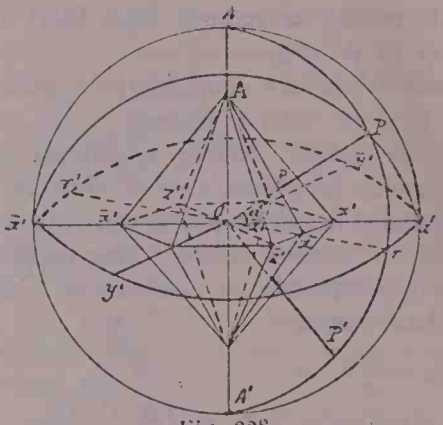


Fig. 228

axelor $x'\bar{x}'$ şi $z'\bar{z}'$ (Fig. 229). Pentru a găsi projecţiunea celuilalt cerc. vom rabate cercul APA' în jurul lui $x\bar{x}$, pe planul cercului de projecţie; punctul de vedere vine în $\bar{y}'$ extremitatea diametrului perpendicular pe $x\bar{x}$, iar polul P va cădea în $\bar{z}'$ la o distantaţă de x egală cu $\frac{\alpha}{2}$. Unind punctul $\bar{z}'$ cu punctul de vedere din $\bar{y}'$ se obţine cu $x\bar{x}$ intersecţia P.

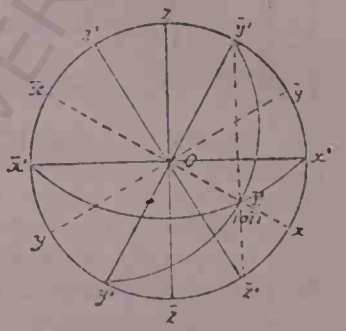


Fig. 229

Dacă ducem acum cercul mare $x'P\bar{x}'$ el va reprezenta projecţia cercului mare de pe sferă: $X'P\bar{X}'$, iar P este projecţia polului feţei: $(10\bar{1}1)$.

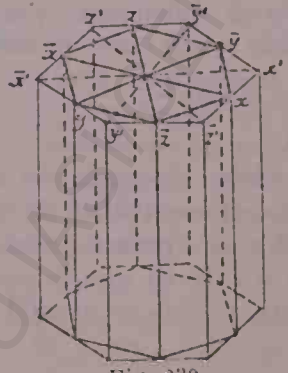


Fig. 230

2). *Modificaţii pe muchile laterale.* Aceste modificaţii sunt de două feluri: a) Simetrice şi b) disimetrice.

a). *Modificaţii simetrice.* Dacă înlocuim una din muchile prismei prin o faţă paralelă cu această muche şi care ia pe celelalte două muchi bazice

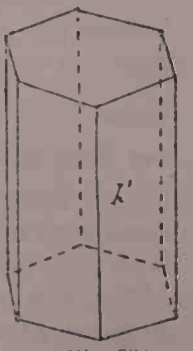


Fig. 231

distanțe egale, această față va fi notată : $b^{\frac{1}{\infty}}\ b^{\frac{1}{2}}\ h^{\frac{1}{0}}$ sau h^1. (Fig. 230). Și fiind că sunt 6 muchi laterale, vom ave 6 fețe, care formează o nouă prizmă, care se chiamă : *Prizma hexagonală inversă*, (Fig. 231) dispusă astfeliu ca axele lui Bravais să unească centrele fețelelor opuse.

— După Naumann această prizmă se numește *Deutero-prizmă*, corespunde raportului parametric : a : 2 a : ∞ c și prin urmare notațiunei : $\infty P2$.

Se poate demonstra că, o față a acestei prizme trecând prin extremitatea unei axa, atinge axa adjacentă la o distanță dublă. In adevăr : să considerăm fața care trece prin extremitatea lui x' și atinge pe $\overline{z}$ în m Fig. 232) ; va trebui să demonstrăm că : Om = 2 Ox'.

In adevăr : unghiul $O\overline{z}'n = 90^0$, și fiind că : $O\overline{z}'x' = 60^0$, rezultă că : $n\overline{z}'x' = 30^0$. De asemenea : $m\overline{z}'n = 90^0$ și fiindcă : $m\overline{z}'p = y'\overline{z}'O = 60^0$, urmează că : $n\overline{z}'p = 30^0 = n\overline{z}'x$. Insă : $p\overline{z}'n = p\,m\overline{z}'$, ca având laturile perpendiculare și pentru acelaș rezon : $n\overline{z}'x' = \overline{z}'On$; deci : $\overline{z}'On = \overline{z}'mn$.

Atunci în triunghiul mnO, două unghiuri fiind egale, laturile opuse trebue să fie și ele egale ; deci : nO = nm și triunghiul nOm este isoscel, iar $n\overline{z}'$ e perpendiculară pe bază, pe care o împarte în două părți egale. Deci : $O\overline{z}' = \overline{z}'m$.

sau : $Om = O\overline{z}' + \overline{z}'m = 2\,O\overline{z}' = 2\,Ox'$.

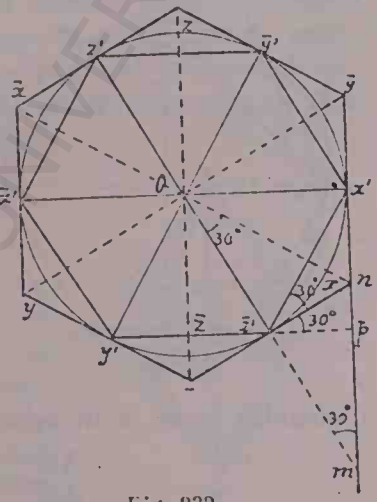


Fig. 232

— După Weiss avem : a : $\overline{z}$ a : $\overline{2}$ a : ∞ c. sau în indici : $\frac{1}{1} : \frac{1}{\overline{2}} : \frac{1}{2} : \frac{1}{\infty}$ de unde după Bravais vom ave notațiunea : ⟨$2\bar{1}\bar{1}0$⟩.

— Polii fețelor deuteroprizmei se găsesc pe circonferența cercului de proiecțiune, însă cad la extremitățile diametrelor ce reprezintă axele lui Bravais.

b⟩. *Modificații disimetrice.* Să înlocuim fiecare muche laterală a prizmei hexagonale prin două fețe paralele cu acea

muche şi care iau pe muchile bazice distanţe deosebite Fig. 233). Se obţine astfeliu o prismă cu 12 feţe numită: *Prizma dodecagonă.* (Fig. 234) care are ca notaţiune : $b^{\frac{1}{x}} b^{\frac{1}{y}} h^{\frac{1}{\infty}}$ sau $h^{\frac{y}{x}}$. Raportul $\frac{y}{x} > 1$.

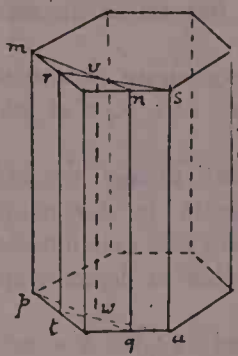


Fig. 233

Baza acestei prisme este un dodecagon care nu are unghiurile sale adjacente egale. In adevăr să considerăm dodecagonul circumscris unui hexagon regulat. (Fig. 235) Să vedem dacă unghiurile A şi B sunt egale. Să unim A cu A' şi A'' şi să punem BAA'=x. Vom ave :

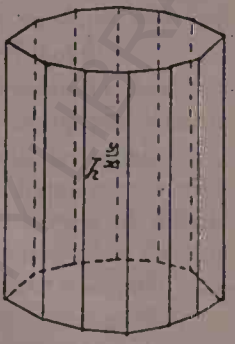


Fig. 234

$$A = 120^0 + 2x \quad \text{şi} \quad B > 180^0 - 2x.$$

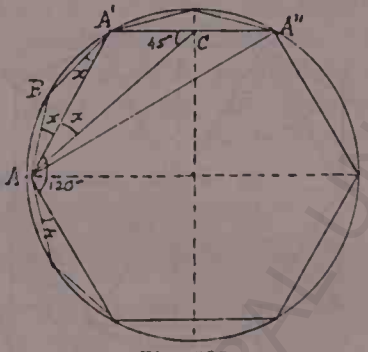


Fig. 235

Pentru ca A să fie egal cu B ar trebui să avem :

$$120^0 + 2x = 180^0 - 2x \quad \text{deci :}$$

$$x = 15^0.$$

Să ducem dreapta AC paralelă cu BA' ; ea va intercepta pe A' A'' o lungime A'C aşa ca distanţele luate pe muchile AA' şi A'A'' de o faţă paralelă cu BA' şi care sunt AA' şi A'C să fie între ele ca sinusurile unghiurilor opuse în triunghiul AA'C. Vom ave atunci :

$$\frac{AA'}{A'C} = \frac{\sin 45^0}{\sin 15^0}.$$

Insă al doilea termen este irațional, şi deci nu e conform cu legea de raţionalitate în derivaţia feţelor cristaline. Deci A nu poate fi egal cu *B* şi prin urmare dodecagonul nu este regulat.

Deci muchile laterale ale prizmei dodecagone sunt de două specii : 6 muchi obtuze şi 6 muchi mai puţin obtuze.

— După Naumann, acest solid numit *Prizma dihexagonală*, corespunde raportului parametric : a : na : ∞c de unde notaţiunea : $\infty P n$.

După Weiss avem: $a : ma : n\bar{a} : \infty c$ de unde notaţiunea după Bravais: ⟨mn, n, $\bar{m}$ 0⟩.

— Pentru proiecţiunea polilor feţelor prizmei dihexagonale observăm că: feţele fiind paralele cu axa $z\bar{z}$, polii lor se vor găsi pe circonferenţa cercului de proiecţiune; apoi că ele corespund feţelor piramidei dihexagonale şi atunci polii lor trebue să se găsească la extremităţile diametrelor pe care se proiectează polii feţelor piramidei dihexagonale.

B. Modificaţii pe unghiuri.

Aceste modificaţii pot să fie de două feluri: 1⟩ Simetrice şi 2⟩ Disimetrice.

1⟩ *Modificaţii simetrice.* Dacă înlocuim unghiurile solide a prizmei hexagonale prin câte o faţă, care să iee pe cele trei muchi ce formează aceste unghiuri, distanţe proporţionale cu lungimile lor, ⟨Fig. 236⟩ vom obţine un solid cu 12 feţe triunghiulare, care va fi un *Dihexaedru* ⟨Fig. 237⟩ a cărui notaţiune va fi:

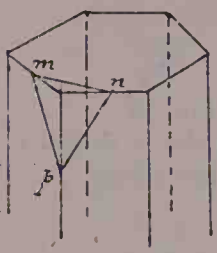


Fig. 236

$$b^{\frac{1}{x}}\, b^{\frac{1}{x}}\, h^{\frac{1}{z}} \quad \text{sau} \quad a^{\frac{z}{x}}$$

şi pentru $x = z$, a^1. Dacă considerăm cele două dihexaedre pe care le-am obţinut, constatăm că: unul fiind aşezat pe axele lui Bravais, cel alt este aşezat pe axele lui Miller, aşa că hexagonul de bază a acestui din urmă are unghiurile sale corespunzând cu mijlocurile muchelor hexagonului de bază a celui întâi, ⟨Fig. 237⟩ şi că e de ajuns de a-l învârti de 60° în jurul lui $z\bar{z}$ pentru ca el să ocupe poziţiunea celui întâi. De aceia se dă celui întâi, numele de: *Dihexaedru direct* sau *Isosceloedru pe muchi*, şi celui al doilea numele de *Dihexaedru invers* sau *Isosceloedru pe unghiuri.*

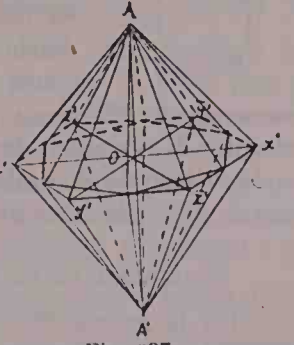


Fig. 237

— După Naumann, Dihexaedrul invers se numeşte: *Deuteropiramidă* şi corespunde raportului parametric: a : 2a : c sau a : 2a : mc, de unde formula: *mP2*. După Weiss raportul parametric este: a : $2\bar{a}$: $2\bar{a}$: c, de unde după Bravais notaţiunea ⟨2 $\bar{1}$ $\bar{1}$ 2⟩.

— Polii feţelor deuteropiramidei se proiecteaza ca şi polii

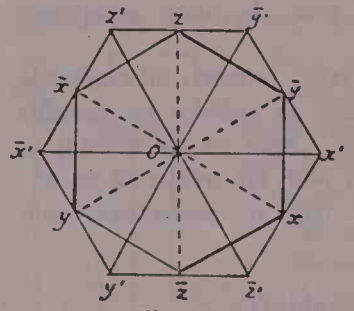


Fig 238

feţelor protopiramidei şi se găsesc pe diametrii ce reprezintă axele lui Bravais.

2). *Modificaţii disimetrice.* Dacă înlocuim unghiurile solide ale prizmei hexagonale prin 2 feţe dispuse simetric în raport cu muchea laterală corespunzetoare, uând pe muchile bazice distanţe diferite (Fig. 239), vom obţine un sollid cu 24 de feţe numit : *Didodecaedru*, având forma unei duble piramide cu bază de dodecagon. (Fig. 240) Feţele sunt triunghiuri scalene; muchile in număr de 36 sunt de 3 feluri : 12 muchi culminante mai lungi X, 12 muchi intermediare Y şi 12 muchi laterale Ξ mai scurte. Unghiurile sunt asemenea de trei specii : 2 unghiuri culminante A compuse din câte 12 feţe, 6 unghiuri laterale B egale între ele, alternând cu alte 6 unghiuri laterale C egale între ele, însă diferite de cele precedente.

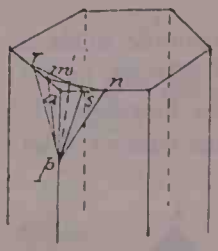


Fig. 239

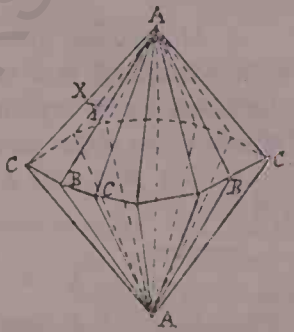


Fig. 240

Notaţiunea sa va fi : $b^{\frac{1}{x}}\ b^{\frac{1}{y}}\ h^{\frac{1}{z}}$.

Ca la prizma dihexagonală, dodecagonul de bază nu are unghiurile sale adjacente egale.

— După Naumann, Didodecaedrul corespunde raportului parametric : a : na : mc, va ave notaţiunea : *mPn*, şi se numeşte *Piramida dihexagonală.*

Este uşor de văzut că : dacă facem : n = 2 vom ave Deuteropiramida. In adevăr, dacă facem să varieze *n* de la 1 la 2, atunci două feţe adjacente a piramidei dihexagonale au tendinţa de a forma unghiuri din ce în ce mai mari, până când pentru n = 2, cele două feţe se află pe acelaş plan. Această valoare este maximum căci, pentru o valoare a lui *n* mai mare de cât 2 solidul nu mai e convex.

După Weiss avem raportul parametric : a : na : n'a : mc de unde notaţiunea ⟨mnn', mn', mn, nn'⟩ după Bravais.

— Proiecţiunea polilor feţelor piramidei dihexagonale se face aşa : Să considerăm faţa x'Ax a cărui pol voim a determina. ⟨Fig. 241⟩ Să scoborâm din centru normalele Op şi Op' pe feţele care formează diedrul Ξ, precum şi normala Op'' pe faţa care determină cu cea întâi diedrul X. Observăm că unghiul pOp' = β este suplimentul lui Ξ şi pOp'' = α este suplimentul lui X. Atunci $\frac{\alpha}{2}$ ne dă unghiul lui XX̄ cu diametrul care reprezintă proiecţia planului Apm, care conţine polul feţei ; şi $\frac{\beta}{2}$ ne reprezintă inclinarea acelui pol către planulcercului de proiecţiune. Atunci ⟨Fig. 242⟩ plecând de la x, luăm xm = $\frac{\alpha}{2}$, ducem diametrul *mm'*, care reprezintă proiecţia planului ce trece prin *p* şi axa verticală. Dacă rabatem acest plan în jurul lui *mm'*, punctul de vedere vine în *n'* iar polul cade pe circonferenţa cercului de proiecţiune în punctul l şi la distanţa ml = $\frac{\beta}{2}$. Unind atunci l cu *n'*, obţinem cu *mm'* intersecţia P, care este proiecţia polului feţei date.

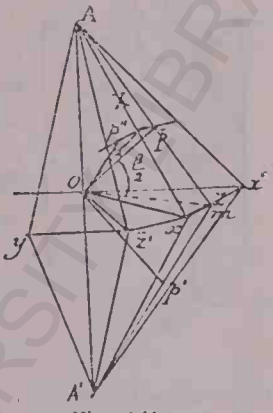


Fig. 241

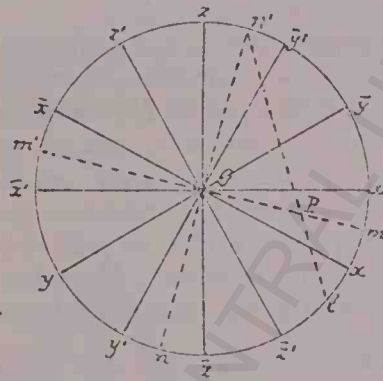


Fig. 242

II. Forme hemiedrice.

Formele hemiedrice ale sistemului hexagonal aparţin sistemului romboedric, pe care avem să-l studiem mai în urmă în detail. Aici vom arăta deducerea acestor forme din prizma hexagonală, studiind mai în detail formele care nu se pot deduce din romboedru.

— Să înlocuim muchile bazice alterne a prizmei hexagonale

prin planuri paralele cu aceste muchi şi să lăsăm să se desvolte aceste feţe, pentru a face să dispară celelalte. (Fig, 243) Vom obţine astfel un solid cu 6 feţe care sunt nişte romburi egale. (Fig. 244) Acest solid se numeşte *Romboedru* şi fiindcă este hemiedria dihexaedrului va ave ca notaţiune :

$$\frac{1}{2}\ b^1.$$

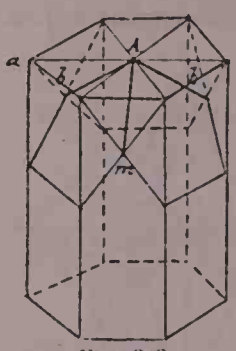


Fig. 243

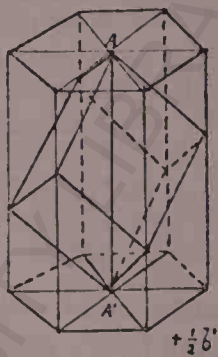


Fig. 244

Dacă modificaţia e făcută pe celelalte muchi, se obţine un romboedru invers, (Fig. 245) care va fi notat : $-\frac{1}{2}\ b^1$.

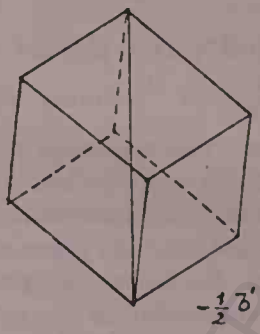


Fig. 245

Prin combinarea acestor două romboedre rezultă dihexaedrul b^1.

— Naumann admite şi el că formele romboedrice sunt hemiedria sistemului hexagonal. Pentru aceasta plecând de la Protopiramida hexagonală, lasă să se desvolte feţe alterne sus şi jos, aşa că feţele care se desvoltă să acopere pe celelalte. (Fig. 246) Rezultă un solid cu 6 feţe care este un romboedru. Dacă desvoltăm o serie de feţe, de exemplu feţele *a*, se obţine *romboedrul pozitiv* notat: $+\frac{P}{2}$ (Fig. 247) ; pe când

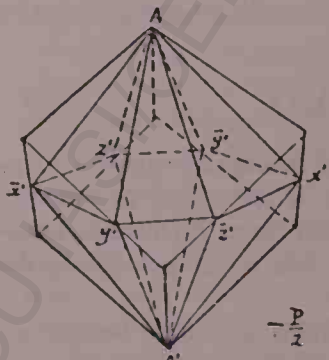


Fig. 246

feţele *b* dau *romboedrul negativ* $-\frac{P}{2}$.

Cu toate aceste Naumann dând Romboedrului o importanţă mai mare de cât unei forme hemiedrice, în-

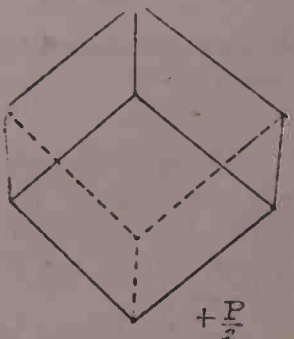


Fig 247

trebuinţează pentru notaţiunea sa litera R iniţiala cuvântului Romboedru, şi atunci avem: pentru romboedrul pozitiv notaţiunea $+R$, şi pentru romboedrul negativ: $-R$.

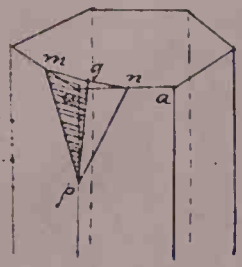


Fig. 248

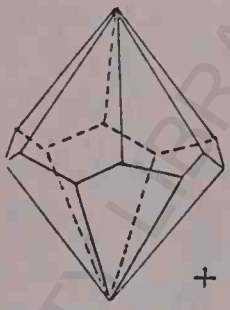


Fig 249

— Să considerăm acum prizma hexagonală şi să înlocuim unghiurile prin câte două feţe din care desvoltăm numai feţele alterne de sus şi de jos (Fig. 248) Vom obţine atunci o hemiedrie a piramidei dihexagonale, care va ave 12 feţe în formă de trapez, din care cauză s'a dat acestor solide numele de *Trapezoedre*. Şi fiind că putem considera o serie sau alta de feţe alterne, vom obţine două forme: Trapezoedrul *direct* (Fig. 249) notat:

$$+\frac{1}{2}\left(b\frac{1}{x}\ b\frac{1}{y}\ h\frac{1}{z}\right)$$

şi Trapezoedrul *invers* (Fig. 250) notat:

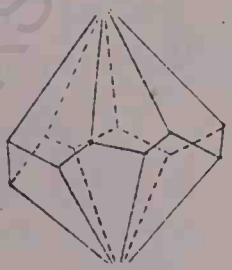


Fig 250

$$-\frac{1}{2}\left(b\frac{1}{x}\ b\frac{1}{y}\ h\frac{1}{z}\right).$$

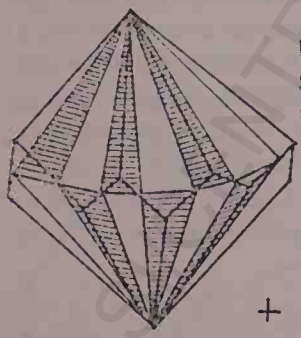


Fig. 251

— După Naumann, trapezoedrele se obţin direct ca hemiedrie a Piramidei dihexagonale, prin desvoltarea feţelor alterne de sus şi de jos. (Fig. 251) Se obţin două forme: un trapezoedru *drept* notat $\frac{mPn}{2}d$ şi un trapezoedru *stâng* notat $\frac{mPn}{2}$ st.

— Dacă considerăm acum prizma hexagonală în care înlocuim unghiurile alterne prin câte două feţe, se obţine o altă hemiedrie a piramidei dihexagonale, care este un solid cu 12 feţe, care sunt nişte triunghiuri scalene. Acest solid se numeşte: *Scalenoedru*, şi fiind că se obţin două forme, una pozitivă (Fig. 252) şi alta negativă, (Fig. 253) notaţiunea lor va fi:

$$\pm \frac{1}{2} \left(b^{\frac{1}{x}} b^{\frac{1}{y}} h^{\frac{1}{z}} \right).$$

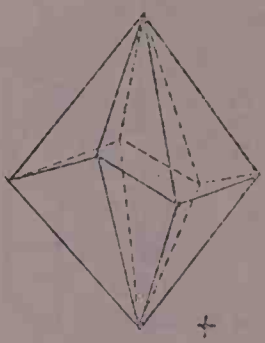


Fig. 252

— După Naumann, această formă se obține direct din piramida dihexagonală prin desvoltarea de perechi de fețe adjacente, alterne, sus și jos. (Fig. 254) Se obțin deci două scalenoedre: unul pozitiv: $+ \frac{mPn}{2}$ (Fig. 254) și altul negativ: $- \frac{mPn}{2}$.

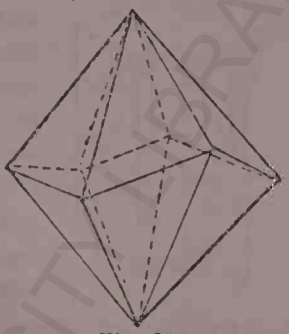


Fig. 253

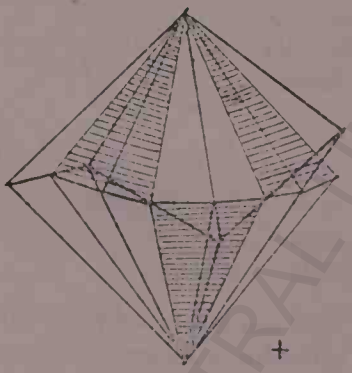


Fig. 254

— Să considerăm acum un scalenoedru și să presupunem că conservăm o grupă de două fețe adjacente sus și jos, și facem să dispară grupa următoare (Fig. 255). Numărul fețelor se reduce la jumătate și se obține un solid cu 6 fețe a cărui muchi laterale se întorc în helice în jurul axei verticale. (Fig. 256). Forma fețelor fiind aceea a unui trapez, și pentru a-l deosebi de trapezoedrul precedent, i s'a dat numele de *Trapezoedru trigon* fiind că are câte trei fețe sus și jos. Și fiindcă scalenoedrul care i-a dat naștere este el însuși o hemiedrie, aceste solide sunt

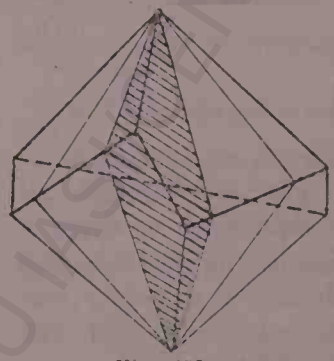


Fig. 255

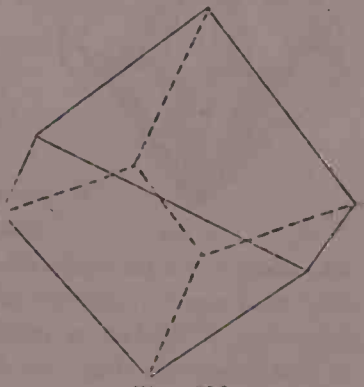


Fig. 256

deci o *Tetartoedrie* a piramidei dihexagonale. Această dublă hemiedrie imaginată de către Naumann, dă în definitiv 4 solide, căci fiecare scalenoedru dă două trapezoedre. Vom ave atunci:

$$+\frac{mPn}{4}\,d, +\frac{mPn}{4}\,st, -\frac{mPn}{4}\,d, -\frac{mPn}{4}\,st.$$

Daeă voim a obține aceste forme direct din prizma hexagonală, va trebui să considerăm mai întâi 3 muchi laterale alterne; apoi înlocuim unghiurile corespunzătoare acestor muchi prin câte două fețe, ceia ce ne conduce la o primă hemiedrie; dacă acum din aceste fețe noi conservăm numai una alternativ la partea superioară și inferioară, rămân 3 fețe la partea superioară și trei la partea inferioară dispuse de o parte și alta a aceleiași muchi laterale corespondente (Fig. 257). Aceste fețe x care se numesc *fețe plagiedre*, se găsesc pe cristalii de cvarț, și dacă considerăm unul din acești cristali așa dispus în cât fața p a romboedrului să fie în mijloc, dacă la partea superioară fețele plagiedre sunt la dreapta în raport cu fețele p, cristalul se numește *Dextrogir* (Fig. 258) nume, care este în relațiune cu proprietatea polarizațiunei rotătoare, de a întoarce la dreapta planul de polarizațiune; când fețele plagiedre sunt la stânga fețelor p, cristalul se numește *Levogir* și întoarce la stânga planul de polarizațiune (Fig. 259).

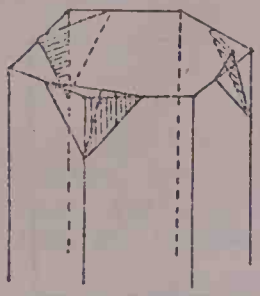


Fig. 257

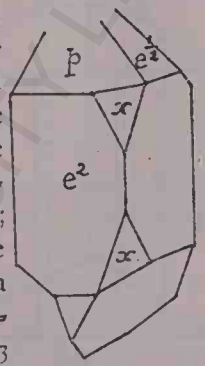


Fig. 258

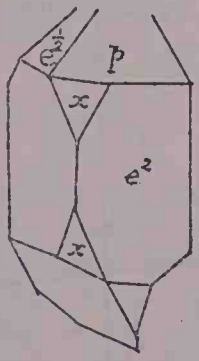


Fig. 259

— Naumann admite încă alte forme hemiedrice. Dacă în prizma dihexagonală facem să dispară părechi de fețe alterne, obținem o prismă, care are ca bază un hexagon neregulat, având trei unghiuri mai obtuze și altele trei

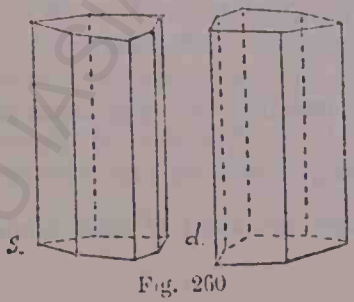


Fig. 260

mai ascuțite. Se obțin astfel două solide (Fig. 260) care se numesc: *prizma ditrigonală dreaptă* și *prizma ditrigonală stângă*, a căror notațiune va fi:

$$\frac{\infty Pn}{2} \text{ d} \quad \text{și} \quad \frac{\infty Pn}{2} \text{ st.}$$

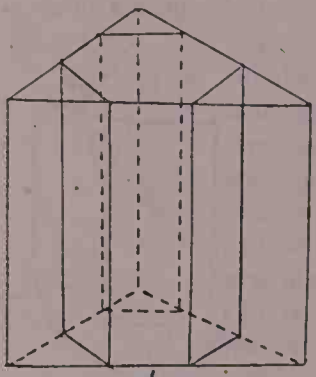


Fig. 261

— Dacă considerăm deuteroprizma hexagonală, în care facem să se desvolte fețe alterne, putem obține două prizme cu bază de triunghiu, care se chiamă *Prizme trigone*;

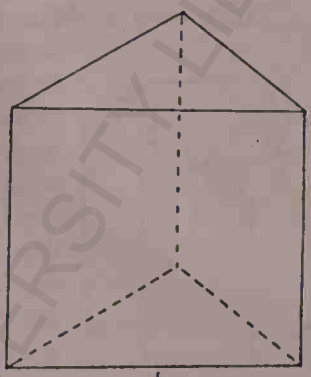


Fig. 262

una *dreaptă* notată $\frac{\infty P_2}{2}$ d (Fig. 261) și alta *stângă* $\frac{\infty P_2}{2}$ st. (Fig. 262).

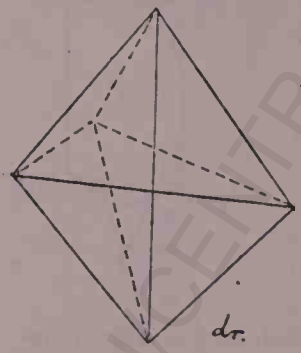


Fig. 263

— De asemenea dacă considerăm deuteropiramida hexagonală și desvoltăm fețele alterne corespunzetoare sus și jos, se obțin două piramide cu bază de triunghiu și care se numesc: *Piramide trigone*, din care: una *dreaptă* notată: $\frac{mP_2}{2}$ d (Fig. 263) și

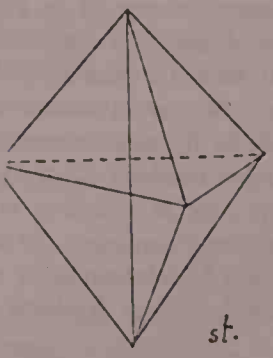


Fig. 264

alta *stângă* notată: $\frac{mP_2}{2}$ st. (Fig. 264).

Aceste fețe se găsesc pe cristalii de cvarț și câte odată

asociate cu feţele plagiedre (Fig. 265). Ele sunt notate *s* şi se chiamă : feţele *Trigonoedrului* sau a *Hemiisosceloedrului*. Ele au forma rombică şi sunt striate după direcţiuni care merg scoborându-se de la dreapta la stânga pentru cristalii dextrogiri (Fig. 266) şi de la stânga la dreapta pentru cristalii levogiri.

Fig. 265

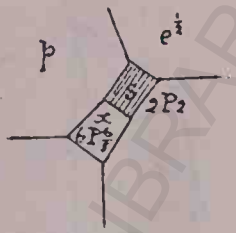


Fig. 266

V

Sistemul Romboedric.

După Levy, forma primitivă a acestui sistem este *Romboedrul*, care este un paralelipiped a cărui feţe sunt romburi egale. Pentru a forma Romboedrul luăm trei drepte egale între ele :

$$ae_1 = ae_2 = ae_3$$

şi făcând unghiuri egale :

$$e_2 ae_1 = e_1 ae_3 = e_2 ae_3.$$

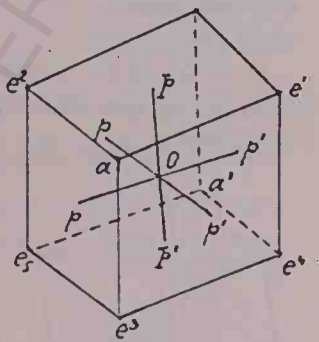


Fig. 267

Să construim pe aceste trei drepte (Fig. 267) ca muchi un paralelipiped. El va ave 6 feţe egale rombice şi va forma *Romboedrul*. Dreptele pp' care reunesc centrele feţelor opuse, sunt egale şi fac între ele unghiuri egale, fiind paralele cu muchile ae_1, ae_2 şi ae_3. Ele se numesc *axe*. Unghiurile *a* şi opusul său a_1 sunt formate de trei unghiuri plane obtuze sau ascuţite egale, pe când celelalte unghiuri : $e_1\ e_2\ e_3$.... sunt formate de un unghiu obtuz şi două suplimentare sau de un unghiu ascuţit şi două suplimentare. Diedrele care formează unghiurile *a* sunt egale pe când diedrele : $e_3\ e_5$, $e_3\ e_4$.... sunt suplimentare diedrelor opuse : ae_1, ae_2.... Când unghiul *a* este format de unghiuri plane obtuze romboedrul se zice *obtuz*, şi când e format de unghiuri plane ascuţite se numeşte *ascuţit*. Se aşează de ordinar romboedrul aşa ca axa aa_1 să fie verticală. Se dă acestei axe numele de *axa principală* (Fig. 268). Romboedrul fiind pus în această poziţiune observăm că : muchile ae_1, ae_2, ae_3 sunt dispuse simetric în jurul

:ace stei axe. Dacă facem să treacă planuri prin una din aceste muchi şi opusa sa, precum ae_1 şi a_1e_4 vom ave atâtea planuri de simetrie, care vor împărţi romboedrul în câte două prizme triunghiulare identice. Avem trei de aceste planuri: $ae_3a_1e_6$, $ae_1a_1e_4$ şi $ae_2a_1e_5$. Aceste trei planuri de simetrie numite şi *secţiuni principale* se întâlnesc după axa principală aa_1.

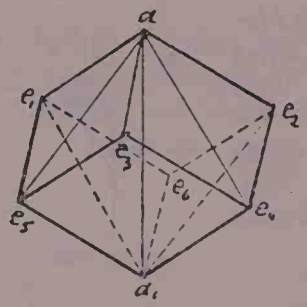


Fig. 268

Triunghiurile ae_1a_1, ae_2a_1, ae_3a_1 sunt egale ca având: $ae_1 = ae_2 = ae_3$ care sunt muchile romboedrului; apoi: $a_1e_1 = a_1e_2 = a_1e_3$ ca diagonale a feţelor romboedrului şi aa_1 comună. Rezultă că unghiurile a_1ae_1, a_1ae_2, a_1ae_3 sunt egale: ele reprezintă unghiurile axei cu muchile. Deci: *muchile culminante formează cu axa principală unghiuri egale.*

— Să unim unghiurile e_1e_2 e_3 între ele: dreptele: e_1 e_2, e_1 e_3, e_2 e_3 sunt egale ca diagonalele feţelor romboedrului; deci, *triunghiul* e_1 e_2 e_3 *este echilateral.*

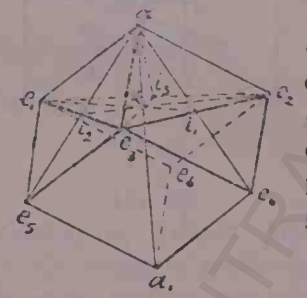


Fig. 269

Dacă ducem medianele: e_1 i_1, e_2 i_2, e_3 i_3 a acestui triunghiu, ele se taie în punctul K, ce se găseşte pe axa aa_1, (Fig. 269). Atunci: $ai_1 = ai_2 = ai_3$ sunt egale

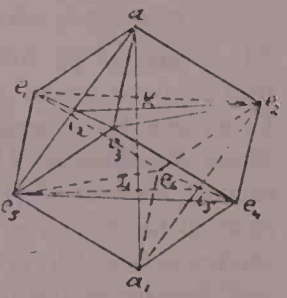


Fig. 270

ca oblice egal depărtate de piciorul perpendicularei, fiindcă: $i_1k = i_2k = i_3k$. Rezultă dar că perpendiculara este aK; şi fiind că aK este verticală urmează că: medianele e_1i_1, e_2i_2, e_3i_3 sunt orizontale şi prin urmare: *planul* e_1 e_2 e_3, care le conţine, *este orizontal.*

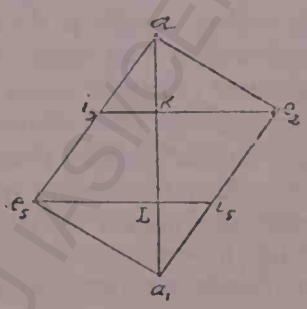


Fig. 271

Să considerăm cele două triunghiuri orizontale: e_1 e_2 e_3 şi e_4 e_5 e_6. (Fig. 270). Secţiunea principală $ae_5a_1e_2$ le

tae după medianele: $e_2 i_2$ și $e_5 i_5$ (Fig. 271). Vom ave deci: $ai_2 = i_2 e_5$. Și atunci în triunghiul ae_5L, avem: $aK = KL$. De asemenea în triunghiul $a_1 e_2 K$ vom ave: $a_1 i_5 = e_2 i_5$ deci:

$$a_1 L = KL \text{ sau: } aK = KL = La_1$$

Deci: *axa aa_1 este împărțită în trei părți egale de planurile triunghiurilor orizontale.*

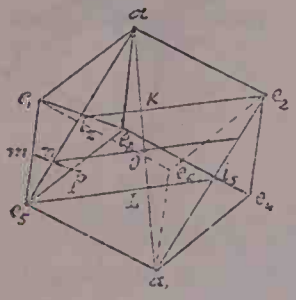


Fig. 272

— Prin centrul O al romboedrului să ducem în planul secțiunei principale o dreaptă orizontală *On* (Fig. 272). Fiind că avem: $Oa = Oa_1$ și $aK = La_1$ urmează că: $OK = OL$. Atunci în triunghiul ae_5L (Fig. 273) avem: On paralel cu e_5L și cu i_2K, deci: $i_2 n = ne_5$. Deci planul orizontal dus prin centru, întâlnește diagonalele ae_5, ae_4, ae_6 la $\frac{3}{4}$ din lungimea lor, de la punctul *a*. Același plan va întâlni fețele ae_5, ae_4 ae_6 după drepte paralele cu diagonala mică a fețelor romboedrului. Vom ave deci: *mnp* paralelă cu $e_1 e_3$. Însă $ne_5 = n i_2$ Deci: $e_1 m = me_5$.

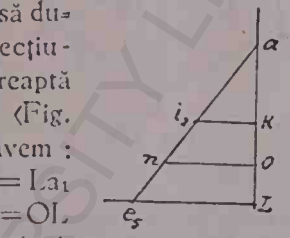


Fig. 273

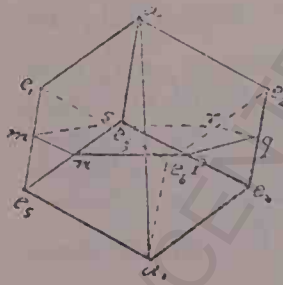


Fig. 274

Rezultă dar că: *planul orizontal, care trece prin centru, trece de asemenea prin mijlocurile muchiilor laterale*: $e_1 e_5$, $e_3 e_5$, și va lasa pe suprafața romboedrului ca urmă, un hexagon regulat: mnpqrs. (Fig. 274).

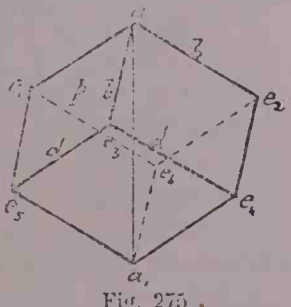


Fig. 275.

Notațiunea romboedrului este: *p*. (Fig. 275). El are 6 fețe identice, care sunt niște romburi. Apoi: 8 unghiuri solide din care: două unghiuri *a* numite *culminante* și 6 unghiuri *e* numite *laterale*, apoi 12 muchi, din care: 6 muchi *b* culminante, formând

unghiurile *a* şi alte 6 muchi *d* laterale în zig zag reunind unghiurile *e*.

— După cum am văzut la sistemul hexagonal, Naumann admite că Romboedrul este o formă hemiedrică a prizmei hexagonale, şi-i dă notaţiunea :

$$\cdot \pm \frac{P}{2} \cdot$$

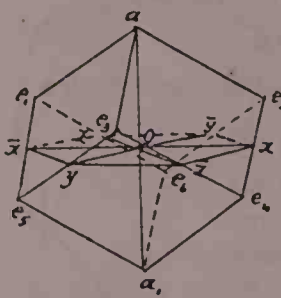


Fig. 276

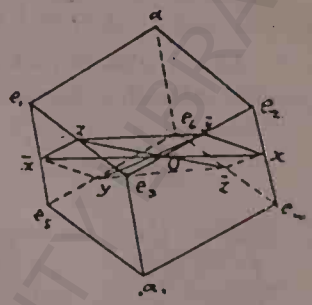


Fig 277

Insă, pentru a da o mai mare importanţă Romboedrului, întrebuinţează pentru notaţiune litera *R*, iniţiala cuvântului Romboedru ; atunci *Romboedrul primitiv* a lui Levy, corespunde cu *Romboedrul pozitiv* a lui Naumann, şi are ca notaţiune + *R*. Naumann admite aceleaşi axe ca la sistemul hexagonal ; deci romboedrul va corespunde raportului parametric : a : a : c.

Putem obţine Romboedrul ca hemiedrie a Deuteropiramidei ca şi a Protopiramidei ; în acest caz axele laterale reunesc unghiurile *e* două câte două. Notaţiunea sa va fi în acest caz : $\pm \frac{P_2}{2}$. Romboedrul poate fi dedus de asemenea din Piramida dihexagonală făcând să dispară mai întâi alternativ feţele corespondente sus şi jos : Se obţine astfel mai întâi o primă hemiedrie : o *Tritopiramidă* notată : $\frac{mPn}{2}$, din care, prin o nouă hemiedrie se obţine Romboedrul, care este în realitate o Tetartoedrie şi va fi notat : $\frac{mPn}{4}$. Fig. 278)

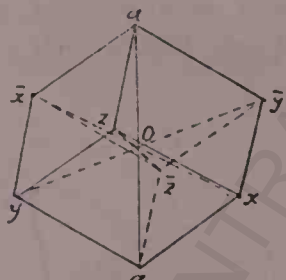


Fig. 278

— Pentru a vede notaţiunele Romboedrului după Miller şi Bravais, să considerăm mai întâi axele. Fie un romboedru a cărui axă ternară aa_1 este verticală, fiind construit pe axele unei prizme hexagonale, a cărei axă senară coincide cu aa_1 (Fig. 279). Ştim că în jurul acestei axe muchile culminante

sunt dispuse simetric. Să considerăm axele care reunesc mijlocurile muchilor laterale opuse, şi se încrucişază în centrul axei ternare; ştim că aceste axe se găsesc în planul orizontal, şi formează unghiuri de 60°: ele corespund cu axele binare de prima specie de la sistemul hexagonal, fiind bisectriţele unghiurilor formate de celelalte axe. Aceste sunt axele lui Bravais. Reunind extremităţile acestor axe, obţinem hexagonul orizontal, a cărui plan e perpendicular pe axa aa_1.

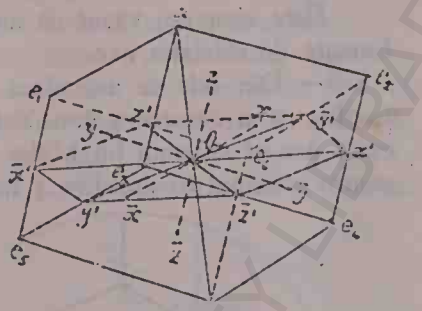


Fig 279

Putem considera încă un alt sistem de axe acel care se obţine unind mijlocurile feţelor opuse precum: $x\bar{x}$, $y\bar{y}$, $z\bar{z}$, care se întâlnesc în centrul 0 al Romboedrului. (Fig. 280). Aceste sunt axele lui Levy şi a lui Miller. Observăm că, fiecare din aceste axe este paralelă cu una din cele trei muchi culminante (Fig. 281) aşa că: dacă facem să treacă un plan prin $x\bar{x}$ şi muchea ae_1, acest plan va trece şi prin $a_1 e_4$ şi va da diagonalele ae_4 şi a_1e_1, în mijlocul cărora vin extremităţile axei $x\bar{x}$. De asemenea, planul care trece prin $y\bar{y}$ şi ae_2, va da diagonalele ae_3 şi a_1e_2, iar planul care trece prin $z\bar{z}$ şi ae_3 va da diagonalele ae_6 şi $a_1 e_3$. Fiecare din aceste planuri împărţind romboedrul în 2 părţi egale, va fi un plan de simetrie: vor forma între ele unghiuri de 120°.

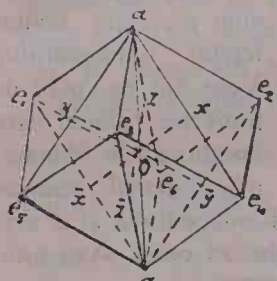


Fig. 280

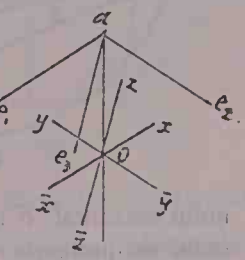


Fig. 281

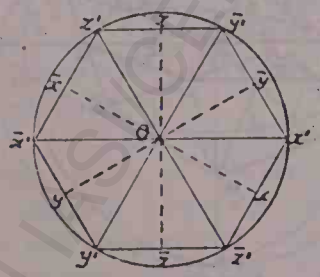


Fig. 282

Pentru a putea mai bine observa în ce relaţiune se găsesc axele, vom presupune planul hexagonului orizontal ca plan de proiecţie (Fig. 282) şi atunci proiecţiunile axelor vor fi:

$x\bar{x}$, $y\bar{y}$, $z\bar{z}$ şi $x'\bar{x}'$, $y'\bar{y}'$, $z'\bar{z}'$

Este uşor de văzut că unele sunt bisectriţele unghiurilor formate de celelalte axe.

— Din cele ce am văzut, rezultă că, pentru sistemul romboedric vom considera două sisteme de axe: sistemul lui Bravais cu 4 axe şi sistemul lui Miller cu 3 axe. Iar ca urmare vom ave pentru sistemul romboedric 4 notaţiuni: acea a lui Levy, a lui Naumann, a lui Miller şi a lui Bravais. Deci: pentru Romboedrul primitiv vom ave notaţiunile: a : ∞a : $\bar{a}$: c sau (10$\bar{1}$1) Bravais şi a : ∞a : ∞a sau (100) Miller.

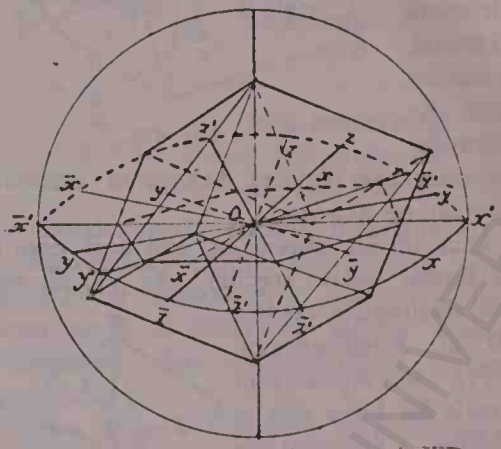


Fig. 283

— Să examinăm acum proiecţia polilor feţelor romboedrului. Vom lua ca plan de proiecţie, planul care conţin axele binare, adică planul hexagonului orizontal (Fig. 283). Fie O centrul Romboedrului şi a cercului de proiecţie corespunzetor hexagonului orizontal. Axa principală aa_1 se proiectează în O, iar axele $x\bar{x}$, $y\bar{y}$, $z\bar{z}$ după $x0\bar{x}$, $y0\bar{y}$, $z0\bar{z}$, formând între ele unghiuri de 120°. Insă după cele ce am văzut mai sus, planurile care trec prin axa principală şi muchile culminante conţin de asemenea axele $x\bar{x}$, $y\bar{y}$, $z\bar{z}$. Deci muchile culminante se proiectează după: $O\bar{x}$, $O\bar{y}$, $O\bar{z}$. Axele bi-

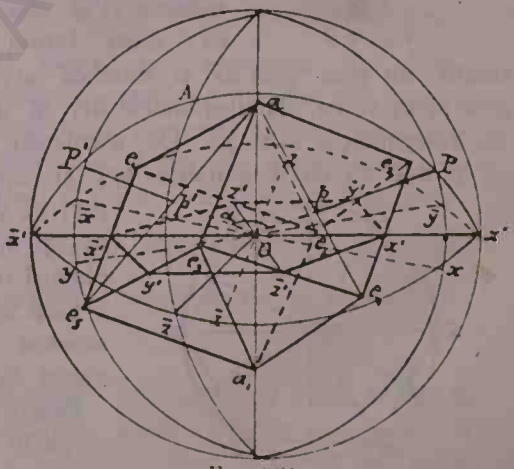


Fig. 284

nare de prima specie fiind în planul de proiecțiune se vor proiecta în adevărata lor mărime după $x'\bar{x}'$, $y'\bar{y}'$, $z'\bar{z}'$, formând între ele unghiuri de 120^0 și cu axele de a două specie unghiuri de 30^0.

— Pentru proiecția polilor fețelor romboedrului primitiv, observăm că, perpendicularele scoborâte din centru pe fețe nu coincid cu axele Ox, Oy, Oz, dar sunt conținute în planurile ce trec prin aceste axe și axa aa_1, așa că polul feței $e_2 ae_3 e_4$ se va găsi la intersecția cercului ce trece prin aa_1 și Ox, cu cercul ce trece prin pol și $x'\bar{x}'$ (Fig. 284). Pentru a determina proiecția lui, știm că primul plan se proiectează după $x\bar{x}$, deci polul se va găsi pe porțiunea Ox. Pentru a determina proiecția planului al doilea, măsurăm diedrul ae_3 care se proiectează după 0z, suplimentul seu α, reprezintă unghiul normalelor la fețele ce formează diedrul ae_3, iar $\frac{\alpha}{2}$ va

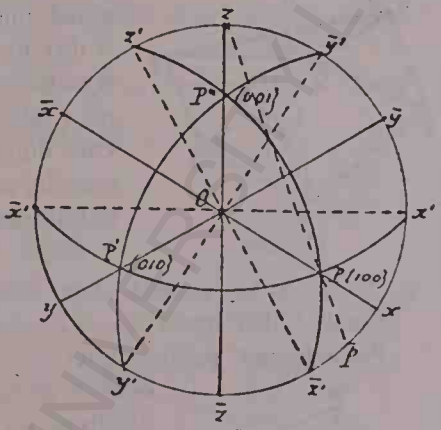


Fig. 285

fi distanța polului la cercul corespunzător diedrului ae_3 și prin urmare: $\pi - \frac{\alpha}{2}$ distanța polului la x' extremitatea diametrului $x'\bar{x}'$ perpendicular pe $z\bar{z}$. Dacă vom rabate cercul $x'P\bar{x}'$ în jurul lui $x'\bar{x}'$ pe planul de proiecție, este evident că punctul de vedere va veni în z, iar polul în un punct p pe circonferența cercului de proiecție, la o distanță $\pi - \frac{\alpha}{2}$ de la x' (Fig. 285). Unind punctul p cu z obținem cu $x\bar{x}$ intersecția P: prin x', P și $\bar{x}'$ ducem un cerc mare care reprezintă proiecția cercului $x'P\bar{x}'$, iar P este proiecția polului P. Tot așa vom determina proiecția polilor P', P' a celorlalte fețe.

Dacă prin câte doi poli astfel determinați și axa corespondentă, ducem un cerc mare, vom obține un triunghiu sferic P P'P'' în interiorul căruia vor cădea polii fețelor romboedrilor ascuțiți iar polii romboedrelor obtuze se vor găsi în afara acestui triunghiu, Notațiunea polilor este: P (100), P' (010) P'' (001).

— Romboedrul este susceptibil mai întâi de două feluri de modificații: I. *Modificații pe unghiuri* și II. *Modificații pe muchi.*

I. Modificaţii pe unghiuri

Aïci vom ave de considerat două cazuri: A⟩ Modificaţii pe unghiurile *a* şi B⟩ Modificaţii pe unghiurile *c*.

A⟩ *Modificaţii pe unghiurile a.* Aceste modificaţii sunt de două feluri: a⟩ simetrice şi b⟩ disimetrice.

a⟩ *Modificaţii simetrice.*

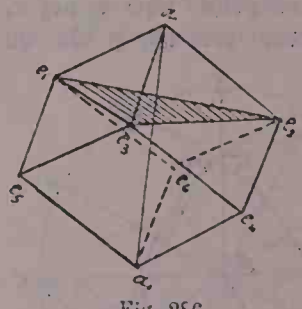


Fig. 286

1⟩ Să considerăm planul care trece prin unghiurile $e_1\ e_2\ e_3$, şi care, înlocuind unghiul *a*, ia pe cele trei muchi *b* distanţe egale ⟨Fig. 286⟩. Faţa va fi notată: $b^1b^1b^1$ sau a^1. Această faţă nu e altceva de cât *Bazipinacoidul*, care după Naumann, corespunde raportului parametric: a : a : 0c, de unde notaţiunea: *0R*.

După Weiss şi Rose avem:

$\infty a : \infty a : \infty a : c$ şi deci după Bravais: ⟨0001⟩

După Miller avem: a : a : a sau ⟨111⟩.

Proiecţiunea polului feţei de Bazipinacoid se găseşte în centrul cercului de proiecţiune, confundându se cu proiecţiunea axei principale.

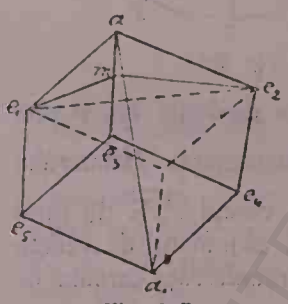


Fig. 287

II. Fie planul $me_1\ e_2$, care ia distanţele: ⟨Fig. 287⟩ $am = b^{\frac{1}{x}}ae_1 = b^1$, $ae_2 = b^1$. Faţa va fi notată: $b^1b^1b^{\frac{1}{x}}$ sau: a^x. Fiind că modificaţiunele sunt simetrice în jurul lui aa_1, vom ave trei feţe la partea superioară, şi trei la partea inferioară ⟨Fig. 288⟩ ceia ce ne va conduce la un *Romboedru* de forma generală: a^x. Se obţine astfel o serie de romboedri, care sunt obtuzi, şi care pot fi de două feluri, după valorile ce vom da distanţelor luate pe muchi. Aşa:

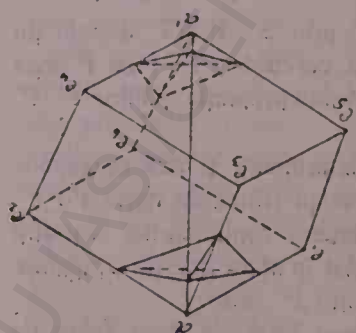


Fig. 288

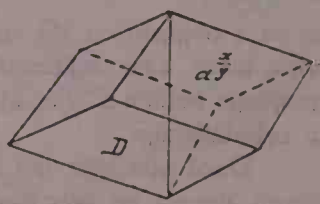


Fig. 249

luând forma generală : $b^{\frac{1}{x}} b^{\frac{1}{y}} b^{\frac{1}{y}} = a^{\frac{x}{y^-}}$ dacă $x > y$ sau $\frac{x}{y} > 1$. se obţine o serie de *Romboedre directe* ⟨Fig. 289⟩ precum : $b^{\frac{1}{2}} b^1 b^1 = a^2$. $b^{\frac{1}{3}} b^1 b^1 = a^3$ $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} a^{=\frac{3}{2}}$ Dacă însă vom ave : $x < y$ şi prin urmare : $\frac{x}{y} < 1$ ⟨Fig. 290⟩ atunci obţinem o serie de *Romboedre inverse* ⟨Fig. 291⟩ precum : $b^1 b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$

$b^1 b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$ $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

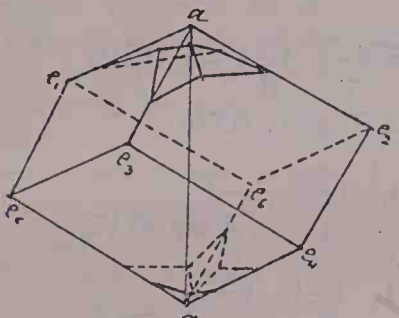


Fig. 290

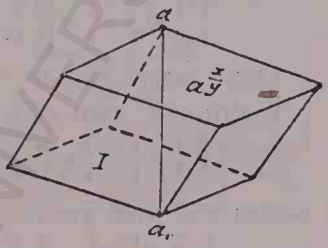


Fig. 291

— După Naumann, aceşti romboedri corespunzind raportului parametric : a : a : $\frac{1}{m}$ c, vor fi notaţi : $\pm \frac{1}{m}$ R. ceia ce arată că, pot fi pozitivi sau direcţi, şi negativi sau inverşi, cu condiţia ca : $\frac{1}{m} < 1$.

După Bravais avem : a : ∞a : $\bar{a}$: $\frac{1}{m}$ c sau ⟨10$\bar{1}$m⟩. Pentru a găsi notaţiunea după Miller, putem proceda în două moduri :

1⟩ Sau plecând direct de la notaţiunea lui Levy, şi atunci : indicii lui Miller sunt inversele exponenţilor lui b din notaţiunea lui Levy ; aşa din : $b^{\frac{1}{2}} b^1 b^1$, vom ave : $\frac{2}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{1}$ sau ⟨211⟩ , din $b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ vom ave : $\frac{3}{1} : \frac{2}{1} : \frac{2}{1}$ sau ⟨322⟩ etc.

2⟩ Sau plecând de la notaţiunea lui Bravais, şi servindu-ne de anumite formule de transformare pe care ne propunem de a le stabili.

Să considerăm projecţiunea axelor lui Bravais şi a lui Miller.

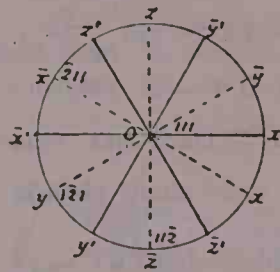


Fig. 292

Am văzut că: la extremităţile axelor lui Miller se găsesc polii feţelor de protoprizmă: $11\bar{2}$, $1\bar{2}1$, $\bar{2}11$, iar în centru se projectează polul feţei de bazipinacoid: ⟨111⟩. ⟨Fig. 292⟩. Observăm că: faţa de bazipinacoid este în zonă cu fiecare din feţele protoprizmei, aşa că axele de zonă sunt tocmai axele lui Bravais, şi prin urmare, conform legei zonelor, vom căuta indicii acestor axe de zonă. Vom ave deci: Pentru zona: ⟨111⟩ cu ⟨$1\,1\bar{2}$⟩.

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 \times \bar{2} \times 1 \times 1 & \bar{2} \\ 1 & 1 \times 1 \times 1 \times 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1-\bar{2}, & \bar{2}-1, & 1-1 \\ 3 & \bar{3} & 0 \end{array} \text{ sau } \langle 1\bar{1}0\rangle.$$

Deci: indicii axei de zonă $x'\,\bar{x}'$ sunt: ⟨$1\bar{1}0$⟩.

Pentru $y'\bar{y}'$ vom găsi:

$$\begin{array}{c|c|c} \bar{2} & 1 \times 1 \times \bar{2} \times 1 & 1 \\ 1 & 1 \times 1 \times 1 \times 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1-1, & 1-\bar{2}, & \bar{2}-1. \\ 0 & 3 & \bar{3} \end{array} \text{ sau } \langle 0\,1\bar{1}\rangle.$$

Şi pentru $z'\bar{z}'$, vom ave:

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & \bar{2} \times 1 \times 1 \times \bar{2} & 1 \\ 1 & 1 \times 1 \times 1 \times 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bar{2}-1, & 1-1, & 1-\bar{2} \\ \bar{3} & 0 & 3 \end{array} \text{ sau } \langle \bar{1}0\,1\rangle.$$

Făcând suma indicilor axelor de zonă, găsim că ea este egală cu zero:

$$1+\bar{1}+0=0, \quad 0+1+\bar{1}=0, \quad \bar{1}+0+1=0.$$

Pe când pentru axa principală ea este: $1+1+1$, diferită de zero.

Insemnând cu h, k. $\bar{1}$, l indicii lui Bravais şi prin: q, r, s, indicii lui Miller, vom pute scrie:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Pentru faţa în } x': q-r+o=o & \text{sau} & h=q-r. \\ \text{« « « } y': o+r-s=o & \text{«} & k=r-s. \\ \text{« « « } z': \bar{q}+o+s=o & \text{«} & \bar{1}=s-q. \\ \text{« « « } a: q+r+s=l & \text{«} & l=q+r+s \end{array}\right\} \langle\alpha\rangle$$

Ultima din formulele ⟨α⟩ ne dă: $q=l-r-s$.

Insă: $-r=h-q$, şi $-s=-\bar{1}-q$. Deci:

$q=l+h-q-\bar{1}-q$. sau $3q=l+h-\bar{1}$.

Vom găsi de asemenea: $3r=l+k-h$ şi

$3s=l+\bar{1}-k$.

sau:

$$\left.\begin{array}{l} q=l+h-\bar{1}, \\ r=l+k-h. \\ s=l+i-k. \end{array}\right\} \langle\beta\rangle$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Formulele ⟨α⟩ şi ⟨β⟩ ne servesc a transforma indicii lui Bravais în Miller, sau a lui Miller în Bravais. Aşa: notaţiunea: $b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{1}}b^{\frac{1}{1}} = a^2$, ne dă direct: ⟨211⟩. După Bravais avem: ⟨1 0 $\bar{1}$ 4⟩; iar după Miller:

$q = 4 + 1 - \bar{1} = 6, \quad r = 4 + 0 - 1 = 3, \quad s = 4 + \bar{1} - 0 = 3.$

sau: ⟨633⟩ sau încă: ⟨211⟩.

De asemenea: $b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} =$ ⟨1 0 $\bar{1}$ 7⟩ ne dă:

$q = 7 + 1 - \bar{1} = q, \quad r = 7 + 0 - 1 = 6, \quad s = 7 + \bar{1} - 0 = 6.$

Deci după Miller: ⟨322⟩.

Proiecţiunea polilor feţelor acestor romboedri ne dă: ⟨Fig. 293⟩ 1) pentru cei obtuzi, proiecţiunea polilor se găseşte în interiorul triunghiului sferic PP'P'' apoi 2) *polii romboedrilor direcţi* precum: ⟨411⟩, ⟨311⟩ ⟨211⟩... se vor găsi între O şi P, O şi P', O şi P''; pe când *polii romboedrilor inverşi* precum: ⟨221⟩ ⟨332⟩... se vor projecta între: O şi P_1, O şi P_1', O şi P_1''.

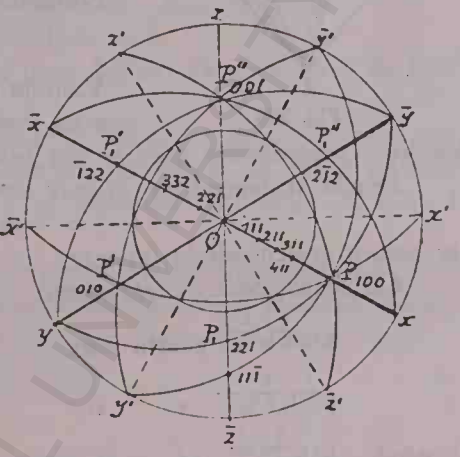


Fig. 293

b) *Modificaţii disimetrice*

1) Să considerăm planul Omn, care ia pe cele trei muchi *b* ce formează unghiul *a* distanţele diferite: $aO = b^{\frac{1}{x}}$, $am = b^{\frac{1}{y}}$, $an = b^{\frac{1}{z}}$. Aşa că: $x < y < z$. ⟨Fig. 294⟩. Pentru rezon de simetrie va trebui o altă faţă: Opq, care să iee: $aO = b^{\frac{1}{x}}$, $ap = b^{\frac{1}{z}}$ $ag = b^{\frac{1}{y}}$. Ele se vor întretăe după dreapta Os. Şi fiind că în jurul lui *a* sunt trei muchi simetrice, vom obţine în definitiv 6 feţe, care, împreună cu acele ce înlocuesc ungbiul a_1, vor forma un solid cu 12 feţe, care sunt nişte

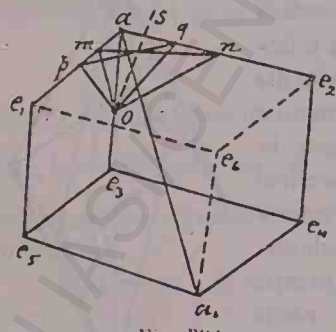


Fig. 294

triunghiuri scalene, de unde numele de: *Scalenoedru* (Fig. 295).

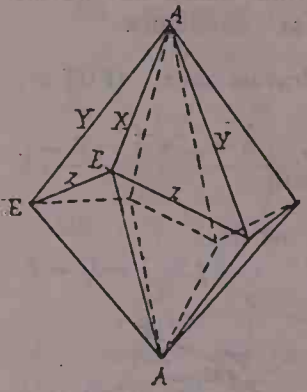


Fig. 295

Mai are încă: 8 unghiuri solide din care: 2 unghiuri culminante A, formate din 6 fețe, și 6 unghiuri laterale E formate de câte 4 fețe; în fine: 18 muchi de 3 feluri: 6 muchi culminante lungi Y, 6 scurte X și 6 muchi laterale în zig-zag Ξ, diferite de cele precedente.

Notațiunea sa generală este:

$$b^{\frac{1}{x}}\, b^{\frac{1}{y}}\, b^{\frac{1}{z}}.$$

Valorile lui x, y, z pot să varieze, așa că vom ave ca și pentru romboedre: *Scalenoedre directe* sau *inverse*.

Pentru scalenoedrele *directe* vom ave relațiunea:

$$x + z > 2y.$$

iar pentru scalenoedrele *inverse*: $x + z < 2y$.

Ca scalenoedre directe avem:

$b^1 b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}$ pentru care: $1 + 4 > 2 \times 2$.

$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{5}}$ « « $2 + 5 > 2 \times 3$.

Pe când: $b^1 b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}$ « « $1 + 4 < 2 \times 3$,

$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{5}}$ « « $2 + 5 < 2 \times 4$.

sunt scalenoedre inverse.

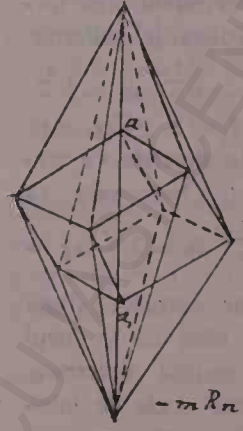


Fig. 296

— Cu toate că, Naumann consideră scalenoedrele ca o hemiedrie a piramidei dihexagonale, pentru a explica notațiunea în raport cu Romboedrul admite că: în interiorul fiecărui Scalenoedru exista un centru romboedric, a cărui muchi laterale coincid cu acele ale scalenoedrului. Atunci, pen-

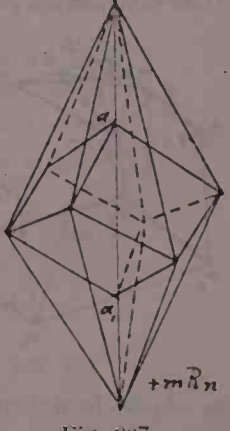


Fig. 297

tru a deduce Scalenoedrul din Romboedru, este de ajuns de a lungi axa principală în sus şi în jos de o cantitate constantă, lăsând intacte muchiile laterale ; atunci, fiecare faţă a romboedrului se va împărţi în două prin o muche care apare în mijloc iar cele trei feţe ale romboedrului vor forma cele 6 feţe superioare sau inferioare ale Scalenoedrului. Deci : Scalenoedrul va fi pozitiv sau negativ, ca şi Romboedrul care i-a dat naştere. ⟨Fig. 296⟩ 297⟩.

Raportul parametric corespondent va fi :

$$na : a : mc \text{ şi notaţiunea : } \pm mRn.$$

După Weiss avem : $na : n'a : \overline{a} : mc$ sau după Bravais :

$$\langle mn'\ mn\ mnn'\ nn^1\rangle.$$

Pentru a avè notaţiunea după Miller, ne vom servi de formele de transformare.

Dacă voim a transforma o notaţiune după Bravais sau Miller în notaţiune după Naumann, va trebui să găsim relaţiunele ce există între *m* şi *n* a lui Naumann şi indicii : h, k, $\overline{1}$, l sau q r s.

Să considerăm notaţiunea generală a lui Naumann : $na : n'a : \overline{a} : mc$; luând inversele şi aducând la forma întreagă avem :

$$h = mn', \quad k = mn, \quad \overline{1} = mnn', \quad l = nn'.$$

Insă putem pune : $m = \dfrac{mnn'}{nn'} = \dfrac{\overline{1}}{l}$ şi .

$$n = \frac{mnn'}{mn'} = \frac{\overline{1}}{h}$$

Dar : $\overline{1} = h + k$. Prin urmare vom pune în definitiv :

$$m = \frac{h+k}{l} \quad \text{şi} \quad n = \frac{h+k}{h}.$$

Atunci formula generală a lui Naumann : *mRn* devine :

$$\frac{h+k}{l}\ R\ \frac{h+k}{h}$$

Pentru formele directe în care : $h > k$. Pentru formele inverse în care $h < k$ formula devine : $\dfrac{h+k}{l} R \dfrac{h+k}{k}$

Pentru a găsi formulele de transformare în indicii lui Miller, observăm că :

$$h = q - r, \quad k = r - s, \quad \overline{1} = s - q \text{ şi } l = q + r + s.$$

Deci : $h + k = q - r + r - s = q - s.$

Atunci notaţiunele precedente devin :

Forme directe : $\dfrac{q-s}{q+r+s} R \dfrac{q-s}{q-r}$ în care : $q + s > 2r.$

Forme inverse : $\frac{q-s}{q+r+s} R \frac{q-s}{r-s}$ în care $q+s<2r$.

Iată câteva aplicaţiuni :

Fie în notaţiunea generală după Weiss :

$\frac{1}{2} a : a : \frac{1}{3}\bar{a} : \frac{1}{7} c$. După Bravais : $\langle 2\ 1\bar{3}\ 7\rangle$.

După Miller prin transformare avem :

$$q = 7 + 2 - \bar{3} = 12$$
$$r = 7 + 1 - 2 = 6 \quad \text{sau } \langle 421\rangle.$$
$$s = 7 + \bar{3} - 1 = 3$$

Aici avem : $h > k$ adecă : $2 > 1$. şi $4 + 1 > 2 \times 2$.

Deci : Scalenoedrul este *direct.*

Notaţiunea după Naumann dedusă după formele precedente va fi :

$\frac{2+1}{7} R \frac{2+1}{2}$ sau $+\frac{3}{7} R \frac{3}{2}$, din Bravais.

sau : $\frac{4-1}{4+2+1} R \frac{4-1}{4-2}$ sau $+\frac{3}{7} R \frac{3}{2}$ din Miller.

Această notaţiune se poate obţine direct din cea parametrică, pe care o scriem : $\frac{1}{3} a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{7} c$ sau $\frac{3}{2} a : a : \frac{3}{7} c$ de unde :

$$+\frac{3}{7} R \frac{3}{2}.$$

Fie încă : $a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{3}\bar{a} : \frac{1}{8} c$. După Bravais : $\langle 1\ 2\bar{3}\ 8\rangle$.

După Miller : $q = 8 + 1 - \bar{3} = 12$

$r = 8 + 2 - 1 = 9$ sau $\langle 431\rangle$.

$s = 8 + \bar{3} - 2 = 3$

Scalenoedrul este *invers,* căci avem :

$$1 < 2 \quad \text{şi} \quad 4 + 1 < 2 \times 3.$$

După Naumann avem :

$\frac{1+2}{8} R \frac{1+2}{2}$ sau $-\frac{3}{8} R \frac{3}{2}$ din Bravais.

$\frac{4-1}{4+3+1} R \frac{4-1}{3-1}$ sau $-\frac{3}{8} R \frac{3}{2}$ din Miller

Şi direct din raportul parametric vom ave :

$\frac{1}{2} a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{8} c$ sau $\frac{3}{2} a : a : \frac{3}{8} c$ sau $-\frac{3}{8} R \frac{3}{2}$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

— Pentru a obține proiecțiunea polilor fețelor Scalenoedrului, întrebuințăm metoda generală, adică: vom determina proiecțiunea a două cercuri mari care trec prin polul feței considerate:

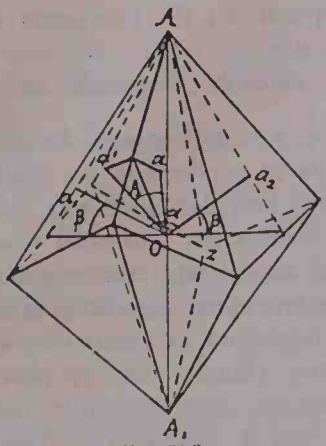


Fig. 298

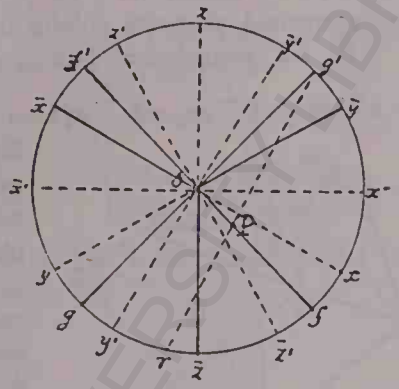


Fig. 299

vom măsura atunci unghiul X pe care-l fac două fețe adjacente, a căror supliment A, ne dă unghiul normalelor la fețele considerate și $\frac{A}{2}$ va fi unghiul pe care-l face normala la o față cu planul ce trece prin axa aa₁ și prin axa lui Miller corespondentă $z\bar{z}$ (Fig. 298). Considerând atunci planul cercului de proiecțiune, plecând din $\bar{z}$ spre x, luăm arcul $\bar{z}f$ egal cu $\frac{A}{2}$ și ducem diametrul corespondent fOf, care reprezintă proiecția cercului mare care trece prin aa₁ și polul feței considerate. (Fig. 299). Ne mai trebue inclinarea polului deasupra planului de proiecție: pentru aceasta muchile laterale nu ne sunt suficiente. Atunci măsurăm unghiul culminant B, a două fețe opuse corespunzind aceleiași extremități a axei verticale. Acest unghiu are ca supliment pe α, unghiul normalelor la acele două fețe, așa că: $\frac{\alpha}{2}$ va reprezenta unghiul pe care-l face una din aceste normale cu axa verticală. acest unghiu $\frac{\alpha}{2}$ ne permite a calcula inclinarea polului, deasupra polului de proiecție, căci avem:

$$\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^0 \text{ deci: } \beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}.$$

Unghiul β este format de normala la faţă cu axa corespondentă din planul de proiecţiune. Deci: plecând din f către $\overline{z}$, vom lua: $fr = \beta$, punctul de vedere este în g^1, extremitatea diametrului normal pe ff'. Unind pe r cu g^1, obţinem cu ff' intersecţia P, care reprezintă proiecţia polului feţei date.

II. Să considerăm faţa c_3mn, care ia distanţele $am = b\frac{1}{z}$ $an = b\frac{1}{y}$ $ae_3 = b\frac{1}{x}$ aşa ca: $x < y < z$. (Fig. 300). Aceast faţă ne-ar conduce la un scalenoedru. Insă dacă luăm faţa *pqn*, care ia distanţele: $ap = aq = an$, planul acestei feţe este orizontal, şi tae faţa c_3mn dupa dreapta *nr*, care reprezintă în acelaş timp intersecţia planului pqn cu planul de simetrie, care trece prin muchea ae_2 şi opusa sa; dreapta *nr* găsindu-se în planul *pqn* este orizontală: Deci: planul orizontal care trece prin centrul cristalului, va tăe faţa c_3mn după drepte orizontale, care reprezinta în acelaş timp intersecţia feţelor de sus cu cele de jos, două câte două. Atunci, baza scalenoedrului care este stângă, devine un hexagon regulat, şi feţele scalenoedrului, care erau triunghiuri scalene, devin triunghiuri isoscele. Deci în locul scalenoedrului vom obţine o dublă piramidă hexagonală, căre se chiamă *isosceloedru*.

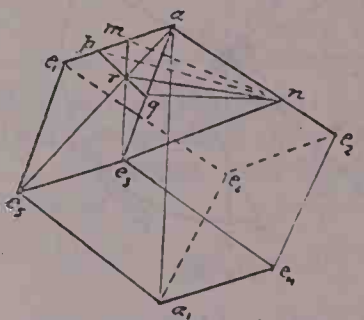


Fig. 300

Am văzut că: condiţiunele pentru ca un scalenoedru să fie direct sau invers egau:

$$x + z \gtrless 2y.$$

Condiţiunea care rămâne încă adică:

$$x + z = 2y$$

este tocmai acea ce trebue pentru ca scalenoedrul să devină un isosceloedru. Aceasta se poate demonstra după cum urmează: Fie faţa ABC, care ia distanţele: (Fig. 301).

$$OA = \frac{1}{x},\ OB = \frac{1}{y},\ OC = \frac{1}{z}$$

Dacă vom lua: $OB = OD = OE$, şi vom duce planul orizontal,

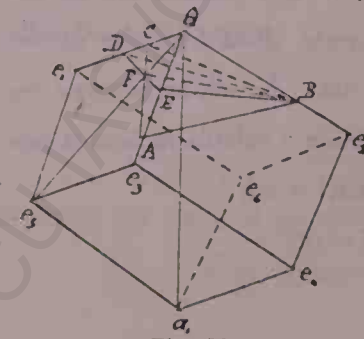


Fig. 301

vom obține intersecția BF, așa că: unind O cu F, această dreaptă este diagonala feței Oc_3 și deci e bisectrița unghiului c_1Oc_3. Atunci în triunghiul COA, OF fiind bisectrița unghiului COA, vom ave:

$$\frac{CO}{OA} = \frac{CF}{FA} \quad \ldots \ldots \langle 1 \rangle.$$

Considerând atunci triunghiurile COF și FOA, care au același vârf și bazele pe aceiaș dreaptă, vom ave relațiunele:

$\frac{COF}{FOA} = \frac{CF}{OF}$ sau dppă ⟨1⟩: $\frac{COF}{FOA} = \frac{CO}{OA}$. De unde putem deduce:

$$\frac{COF + FOA}{FOA} = \frac{CO + OA}{OA} \text{ sau: } \frac{COA}{FOA} = \frac{CO+OA}{OA} \quad \ldots \langle 2 \rangle.$$

De asemenea triunghiurile FOE și FOA, au același vârf F și bazele pe aceiaș dreaptă, ceia ce ne dă:

$$\frac{FOE}{FOA} = \frac{OE}{OA} \quad \ldots \ldots \langle 3 \rangle.$$

Impărțind ⟨2⟩ prin ⟨3⟩ vom ave:

$$\frac{COA}{FOA}\cdot\frac{FOA}{FOE} = \frac{CO+OA}{OA}\cdot\frac{OA}{OE} \text{ sau } \frac{COA}{FOE} = \frac{CO+OA}{OE} \text{ sau}$$

$$\frac{COA}{{}_2FOE} = \frac{CO+OA}{{}_2OE} \quad \ldots \langle 4 \rangle.$$

Insă: ${}_2FOE = DOE$, atunci egalitatea ⟨4⟩ se poate scrie:

$$\frac{COA}{DOE} = \frac{CO+OA}{{}_2OE} \quad \ldots \ldots \langle 5 \rangle.$$

De altă parte triunghiurile DOE și COA au vârful în O, și vom ave:

$$\frac{COA}{DOE} = \frac{CO \times OA}{DO \times OE} = \frac{CO \times OA}{\overline{OE}^2} \quad \ldots \ldots \langle 6 \rangle.$$

Comparând ⟨5⟩ cu ⟨6⟩ avem:

$$\frac{CO+OA}{{}_2OE} = \frac{CO \times OA}{\overline{OE}^2} \text{ sau } \frac{CO+OA}{CO \times OA} = \frac{{}_2OE}{\overline{OE}^2} \text{ sau încă:}$$

$$\frac{CO+OA}{CO \times OA} = \frac{2}{OE} \text{ sau:}$$

$$\frac{CO}{CO \times OA} + \frac{OA}{CO \times OA} = \frac{2}{OE} \text{ sau } \frac{1}{OA} + \frac{1}{CO} = \frac{2}{OE} = \frac{2}{OB}$$

Insă noi avem: $OA = \frac{1}{x}$, $OB = \frac{1}{y}$, $OC = \frac{1}{z}$.

Inlocuind ne vine:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}{\frac{1}{y}} = \frac{2}{1} \text{ sau: } x + z = 2y \ldots . \langle A \rangle.$$

Deci: condiţiunea pentru ca un scalenoedru să devină un isosceloedru e reprezentată prin relaţia ⟨A⟩. Aşa vom ave scalenoedrele:

$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}$, $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{6}}$, $b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{5}}$ care dau:

$2 + 4 = 2 \times 3$, $2 + 6 = 2 \times 4$, $3 + 5 = 2 \times 4$:

şi care sunt nişte isosceloedri.

— După Naumann, pentru isosceloedrele pe unghiurile *a*, corespunde raportul parametric general: $2a : 2a : \bar{a} : mc$ de unde notaţiunea mR_2. După Bravais avem formula generală ⟨m m $2\bar{m}$ 2⟩. Aşa: $2a : 2a : \bar{a} : \frac{2}{9}$ c ne dă direct: $\frac{2}{9}$ R_2. In indici după Bravais ⟨1 $1\bar{2}$ 9⟩ şi prin transformare după Miller: ⟨432⟩. Solidul este un isosceloedru, căci avem: $h = k$, şi $q + s = 2r$. Dacă voim să facem transformarea din Bravais şi Miller în notaţiunea Naumann vom ave:

$\frac{h + K}{l} R_2$ şi $\frac{q - s}{q + r + s} R_2$. Deci: $\frac{1 + 1}{9} R_2$ şi $\frac{4 - 2}{4 + 3 + 2} R_2$

sau: $\frac{2}{9} R_2$.

B. Modificaţii pe unghiurile e.

Aci vom ave încă două feluri de modificaţii: a⟩ simetrice şi b⟩ disimetrice.

a) Modificaţii simetrice.

1⟩ Să considerăm planul *apq*, care ia distanţele:

$ae_3 = b^1$, $e_3p = \frac{d}{2}$, $e_3q = \frac{d}{2}$ ⟨Fig. 302⟩. Această faţă va fi notată:

$$b^1 d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} \text{ sau } e^{\frac{1}{2}}.$$

Fiind că avem 6 unghiuri, vom obţine un solid cu 6 feţe care va fi: un *Romboedru invers*. ⟨Fig. 303⟩. Insă noi observăm că: pq este una din laturile hexagonului format de secţiunea orizontală

prin centrul O. Aşa aO se proiectează pe faţa *apq* după mediana *ag*, care este egală cu a_1g, ca oblice egal depărtate de piciorul perpendicularei *Og*, căci pe de oparte Og este perpendiculară pe aa_1, iar pe de alta: aO $=$ Oa_1. Atunci triunghiurile aOg şi a_1Og sunt egale ca având:

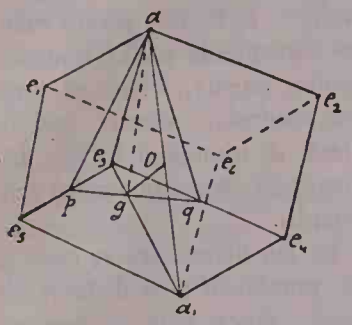


Fig. 302

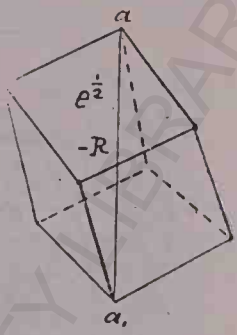


Fig. 303

$$ag = ga_1, \quad aO = Oa_1 \text{ şi } Og = Og.$$

Vor ave prin urmare şi celelalte elemente egale deci va fi şi:

$$\measuredangle\ gaO = ga_1O.$$

Ceia ce însamnă că: axa aa_1, face acelaş unghiu cu feţele romboedrului primitiv *p*, ca şi cu ale romboedrului invers $e^{\frac{1}{2}}$, pentru care i se dă numele de: *Ecvianglu.*

Prin combinarea feţelor romboedrului primitif cu feţele romboedrului inevers $e^{\frac{1}{2}}$ se obţine o dublă piramidă hexagonală, care nu este alt ceva, de cât un *dihexaedru.* (Fig. 304).

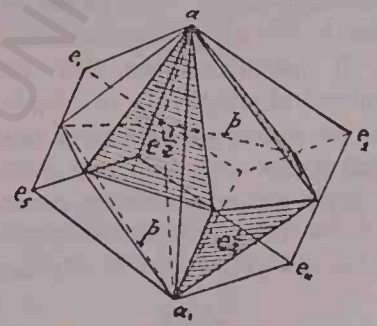


Fig. 304

— După Naumann vom ave raportul parametric: a : a : c sau notaţiunea: — R.

— După Bravais avem: ∞ a : a : $\bar{a}$: c sau $\langle 0\,1\,\bar{1}\,0\rangle$. Pentru a ave notaţiunea după Miller, se observă că, axele lui Miller fiind paralele şi egale cu cele trei muchi care formează unghiul e_3, raportul parametric va fi: $\frac{1}{2}$ a : $\frac{1}{2}$ a : $\bar{a}$ sau a : a : 2 a, de unde notaţiunea: $\langle 22\bar{1}\rangle$.

— Proiecţiunea feţelor romboedrului negativ, se face ca pentru romboedrul pozitiv, însă polii se vor găsi pe porţiunele negative: $O\bar{x}$, $O\bar{y}$, $O\bar{z}$ a axelor. (Fig. 305). Ei sunt: P_1 $\langle 2\,2\bar{1}\rangle$,

P'_1 ⟨$\bar{1}$ 2 2⟩ şi P''_1 ⟨2 $\bar{1}$ 2⟩. Cercurile mari care trec prin aceşti doi poli vor forma un triunghiu sferic : $P_1 P'_1 P''_1$, invers celui ce corespunde polilor romboedrului pozitiv. Fiind că polii romboedrului negativ cad în afară de triunghiul PP'P'', urmează că acest romboedru este ascuţit.

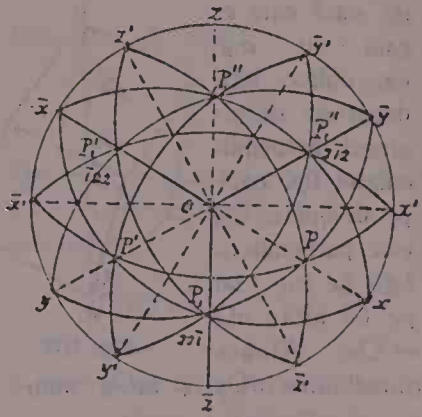


Fig. 305

II⟩ Fie planul $ae_3 e_4$ care ia pe muchile *d* şi *b* distanţe întregi. Acest plan va ave ca intersecţie cu feţele romboedrului, diagonalele acestor feţe, care vor reprezenta în acelaşi timp şi intersecţiile acestei feţe cu cele aplicate pe unghiurile e_1 şi e_2 şi fiindcă avem 6 unghiuri laterale, vom obţine în definitiv un alt romboedru, care va fi astfeliu dispus, faţă cu romboedrul primitiv, în cât feţele sale vor corespunde muchilor celuilalt şi viceversa ⟨Fig. 306⟩. Axa verticală rămânând aceiaşi, acest al doilea romboedru a fost numit de Haüy : *Romboedru invers.*

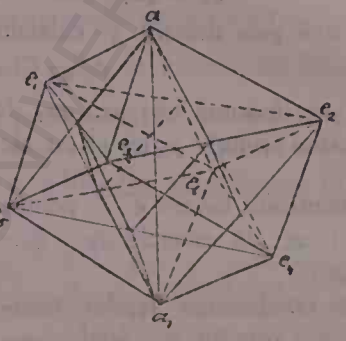


Fig. 306

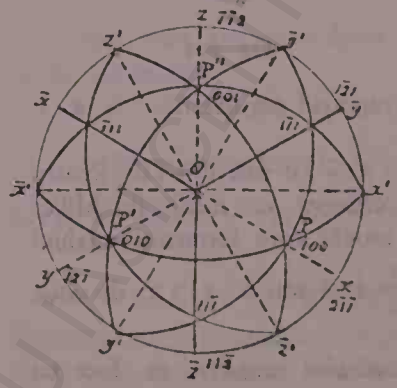


Fig. 307

Notaţiunea sa va fi : $b^1 d^1 d^1$ sau : e^1.

— După Naumann, acest romboedru corespunde raportului parametric : a : a : ∞c, de unde notaţiunea : — ∞R. După Bravais avem : ∞ a : a : $\bar{a}$: ∞c sau : ⟨02$\bar{2}$1⟩ După Miller, raportul : a : a : $\bar{a}$ sau notaţia : ⟨11$\bar{1}$⟩.

— Proiecţiunea polilor feţelor acestui romboedru invers şi ascuţit ne arată că, aceşti poli sunt

cuprinşi între acei ai romboedrului — R şi extremitatea axei (Fig. 307). Urmează că : cu cât coeficientul lui R e mai mare, cu atât romboedrul e mai ascuţit şi deci polul seu mai departat de triunghiul corespondent romboedrului primitiv.

III) Să considerăm planul me_4e_5, care ia pe muchi dinstanţele $e_3 m = \frac{1}{2}b$, $e_3 e_4 = d$, $e_3 e_5 = d$. Această faţă va fi notată : $b^{\frac{1}{2}}d'd'$ sau e^2.

Dacă examinăm figura, vedem că : diagonalele $e_1 e_5$ şi $e_3 a_1$ se întâlnesc în punctul x care este în centrul feţei şi în mijlocul lui $e_3 a_1$ căci : $me_3 = \frac{b}{2}$ $e_3 x = \frac{1}{2}$ $e_3 a_1$. Urmează că : dreapta mx

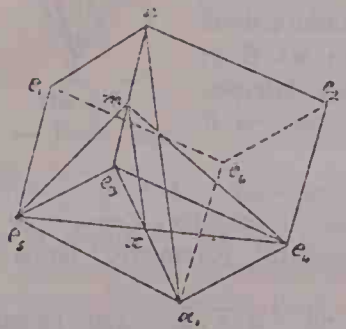


Fig. 308

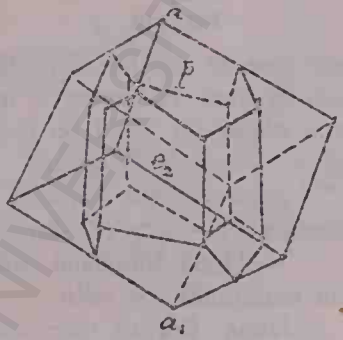


Fig. 309

va fi paralelă cu aa_1 şi fiindcă mx este proiecţia axei pe faţă me_4e_5, această faţă va fi paralelă cu axa aa_1. (Fig. 308). Fiind că avem 6 unghiuri laterale vom ave 6 feţe paralele cu axa ; vom obţine deci : *o prizmă hexagonală* (Fig. 309).

— După Naumann, această prizmă corespunde raportului parametric : a : a : ∞ c, de unde notaţiunea : ∞ R.

După Bravais vom ave : ∞ a : a : $\bar{a}$: ∞ c sau notaţiunea : $\langle 01\bar{1}0 \rangle$.

După Miller : a : a : $\frac{1}{2}$a sau $\langle 11\bar{2} \rangle$.

— Polii feţelor acestei prizme hexagonale se vor găsi pe cercul de proiecţiune la extremităţile diametrelor care reprezintă axele lui Miller.

b) *Modificaţii disimetrice*

I) Fie faţa mnq care interceptează lungimile $e_3 m = \frac{1}{x}b$,

$e_2\ n = \frac{1}{z}d$ şi $e_3\ q = \frac{1}{y}d$. Pentru rezon de simetrie ne trebue o altă faţă simetrică *mpr* care ia:

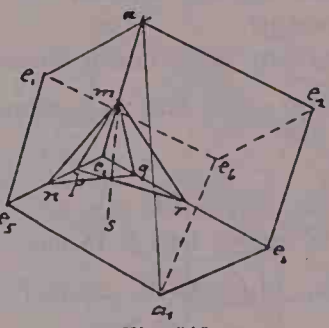


Fig. 310

$e_3\ m = \frac{1}{x}\ b$,

$e_3\ p = \frac{1}{y}\ d$,

$e_3\ r = \frac{1}{z}\ d$.

Vom ave deci în locul unghiului e_3 două feţe care se vor tăe după dreapta *ms*. ⟨Fig. 310⟩. Şi fiind că avem 6 unghiuri laterale, vom obţine un solid cu 12 feţe, care va fi un *scalenoedru*. ⟨Fig. 311⟩.

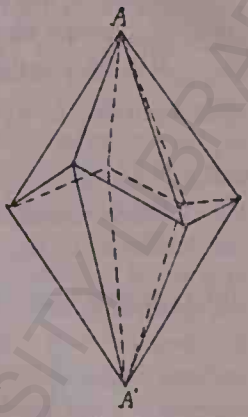


Fig. 311

Scalenoedrele obţinute pe unghiurile *e* pot fi *directe* cu condiţia: $z - x > 2y$, sau *inverse* cu condiţia: $z - x < 2y$.

— După Naumann avem raportul parametric: na : a : mc sau notaţiunea: $\pm$ mRn.

După Bravais vom ave: na : n'a : $\overline{a}$: mc sau formula: ⟨mn' mn $\overline{mnn'}$ nn'⟩

Pentru formele directe avem condiţiunea: $h > k$, şi pentru formele inverse: $h < k$. După Miller aceste condiţiuni sunt: $q - s > 2r$ pentru formele directe şi: $q - s < 2r$ pentru formele inverse.

Aşa: $\frac{2}{3}$ a : a : $\frac{2}{5}\overline{a}$: $\frac{1}{2}$ c, dă, după Bravais: ⟨3 2 $\overline{5}$ 4⟩. Prin transformare în Miller avem:

$$q = 4 + 3 - \overline{5} = 12$$
$$r = 4 + 2 - 3 = 3 \quad \text{sau: } \langle 4\ 1\ \overline{1}\rangle.$$
$$s = 4 + \overline{5} - 2 = \overline{3}$$

Scalenoedrul este direct căci avem:

$$3 > 2 \quad \text{şi} \quad 4 - 1 > 2 \times 1.$$

Pentru a face transformarea în Naumann, după indicii lui Bravais şi a lui Miller, avem:

BCU CLUJ / CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3+2}{4} R \frac{3+2}{3} \\ \frac{4-\bar{1}}{4+1+\bar{1}} R \frac{4-\bar{1}}{4-1} \end{array}\right\} \text{ sau } + \frac{5}{4} R \frac{5}{3}.$$

Scalenoedrul : 2a : a : $\frac{3}{2}\bar{a}$: c, după Bravais ⟨1 2$\bar{3}$ 2⟩ şi după Miller : ⟨2 1$\bar{1}$⟩ este invers căci avem :

$$1 < 2 \quad \text{şi} \quad 2 - 1 < 2 \times 1$$

După Naumann vom ave :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1+2}{2} R \frac{1+2}{2} \\ \frac{2-\bar{1}}{2+1+\bar{1}} R \frac{2-\bar{1}}{1-\bar{1}} \end{array}\right\} \text{ sau } -\frac{3}{2} R \frac{3}{2}.$$

— Polii feţelor scalenoedrelor pe unghiurile e vor căde : pentru scalenoedrele directe în triunghiurile formate de polii ⟨100⟩ ⟨210⟩ ⟨1 0$\bar{1}$⟩ şi ⟨010⟩ ⟨120⟩ ⟨0 1$\bar{1}$⟩. pentru scalenoedrele inverse în spaţiul format de : ⟨120⟩ ⟨210⟩ 1 0$\bar{1}$⟩ ⟨0 1$\bar{1}$⟩.

— Scalenoedrele pe unghiurile e pot deveni *isosceloedre*. Pentru a stabili relaţiunea care există între x, y, z, observăm că : distanţele luate pe cele trei muchi, nu sunt măsurate toate în acelaş senz ca pentru scalenoedrele pe a ; distanţa pe muchea b este luată în sens contrar, ¿Fig. 312⟩ aşa ca x devine negativ şi condiţia pentru a ave isosceloedri devine :

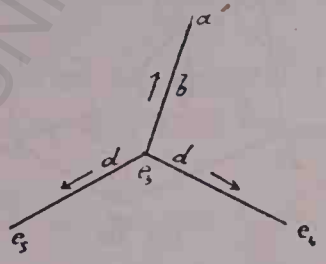


Fig. 312

$$z - x = 2y.$$

Aşa vom ave : $b^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{5}}$ care dă : $8 - 2 = 2 \times 3$.

$b^{\frac{1}{3}} d^{1} d^{\frac{1}{3}}$ « « $5 - 3 = 2 \times 1$.

$b^{1} d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{3}}$ « « $5 - 1 = 2 \times 2$.

— După Naumann, pentru isosceloedrele pe unghiurile e corespunde raportul parametric :

2a : a : mc sau notaţia mR2.

După Bravais : ⟨m m 2$\bar{m}$ 2⟩.

Şi după Miller formula care rezultă prin transformare.

Așa : $2a : 2a : \bar{a} : \frac{4}{3}$ c. dă după Bravais : $\langle 2\,2\,\bar{4}\,3\rangle$ și după Miller : $\langle 3\,1\,\bar{1}\rangle$. Solidul este un isosceloedru căci avem :

$$2 = 2, \text{ și } 3 - 1 = 2 \times 1.$$

După Naumann deducem direct : $\frac{4}{3}$ R2

Și prin transformări :

$$\frac{2+2}{3} R_2, \frac{3-\bar{1}}{3+1+\bar{1}} R_2 \text{ sau } \frac{4}{3} R_2.$$

Polii fețelor isosceloedrelor pe unghiurile e, cad pe axele lui Bravais, între $\langle 210\rangle$ și $\langle 1\,0\,\bar{1}\rangle$ etc.

II) Dacă fețele scalenoedrului devin paralele cu axa, ele vor forma atunci o *prismă dodecagonă*. In adevăr : Să considerăm planul de simetrie a c_2 a_1 c_5 care conține axa aa_1 ; făcând să treacă prin aa_1 un alt plan oare care precum aKa_1 L, acest plan va fi vertical și va tăe fețele romboedrului după dreptele : aK și a_1 L (Fig. 313), determinând pe muchile e_1 e_5 și e_2 e_4 segmentele : $e_1K = e_4$ L și $e_5K = e_2L$....(3). Dacă considerăm acuma planul *mnp*, paralel cu planul aKa_1L, vom obține distanțele e_3 n și e_3p care sunt inegale, pe muchile d, și fiind că simetria binară a axei corespunzetoare cere o a doua față, și sunt 6 unghiuri e, vom ave în definitiv 12 fețe verticale, care vor forma prizma dodecagonă.

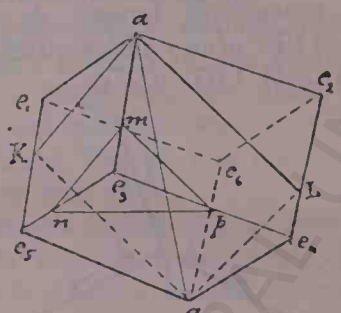


Fig. 313

Putem să arătăm că prizma dodecagonă este un caz particular a scalenoedrelor pe unghiurile laterale. In adevăr : Să considerăm în figura precedentă triunghiurile : a e_1 K și e_3 mn care sunt asemeni și dau : $\frac{e_1K}{ae_1} = \frac{me_3}{e_3n}$ . . . . (1).

De asemenea triunghiurile : ae_2L și me_3p, ne dau :

$$\frac{e_2L}{ae_2} = \frac{me_3}{e_3p} \ldots . \langle 2\rangle.$$

Adunând $\langle 1\rangle$ și $\langle 2\rangle$ vom ave :

$$\frac{e_1K}{ae_1} + \frac{e_2L}{ae_2} = \frac{me_3}{e_3n} + \frac{me_3}{e_3p} = me_3\left[\frac{1}{e_3n} + \frac{1}{e_3p}\right]$$

Insă $ae_1 = ae_2$ deci : $\frac{e_1K + e_2L}{ae_1} = me_3\left[\frac{1}{e_3n} + \frac{1}{e_3p}\right]$

Şi fiind că : $e_2L = e_5K$ atunci : $e_1K + e_2L = e_1K + Ke_5 = e_1e_5$.

Deci : $\frac{e_1e_5}{ae_1} = 1 = me_3\left[\frac{1}{e_3n} + \frac{1}{e_3p}\right]$ sau $\frac{1}{me_3} = \frac{1}{e_3n} + \frac{1}{e_3p}$.

Şi fiind că : $me_3 = \frac{1}{x}\,b$, $e_3n = \frac{1}{z}\,d$ şi $e_3p = \frac{1}{y}\,d$,

vom ave : $\frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{z}} + \frac{1}{\frac{1}{y}}$ sau : $x = y + z$... ⟨b⟩

Exemple : $b^{\frac{1}{6}}d^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}$ care dă : $6 = 4 + 2$.

$b^{\frac{1}{5}}d^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{2}}$ « « $5 = 3 + 2$.

— Polii feţelor prizmei dodecagone, cad pe circonferenţa cercului de proiecţiune şi vor fi cuprinşi între polii feţelor protoprizmei şi a deuteroprizmei.

— Dacă ni se dă : a : $\frac{1}{4}\bar{a}$: $\frac{1}{5}\bar{a}$: ∞c, vom ave după Bravais : ⟨1 $4\bar{3}0$⟩ şi după Miller ⟨2 $1\bar{3}$⟩. Aici avem : $3 = 2 + 1$. După Naumann vom ave direct :

$$\frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a : \infty c \text{ sau } \frac{5}{4}a : a : \infty c \text{ sau } \infty R\,\frac{5}{4}.$$

Prin transformare avem :

$$\infty R\,\frac{h+k}{k} \text{ şi } \infty R\,\frac{q-s}{r-s} \text{ sau : } \infty R\,\frac{1+4}{4} \text{ şi}$$

$$\infty R\,\frac{2-\bar{3}}{1-\bar{3}} \text{ sau } \infty R\,\frac{5}{4}.$$

II. Modificaţii pe muchi.

Aceste modificaţii sunt de două feluri : A⟩ Pe muchile *b* şi B⟩ pe muchile *d*.

A⟩ *Modificaţii pe muchile b.* Ele pot fi : a⟩ simetrice şi b⟩ disimetrice.

a⟩ *Modificaţii simetrice.* Fie planul mnpq paralel cu muchea ae_3 şi care ia distanţele : $am = an = b\frac{1}{x}$ ⟨Fig. 314⟩. Fiind că sunt 6 muchi, vom ave un solid cu 6 feţe, care va fi un *romboedru invers* ⟨Fig. 315⟩ notat : $b^{\frac{1}{0}}b^{\frac{1}{x}}b^{\frac{1}{x}}$ sau b^1.

Fiind că axa principală a acestui romboedru este aceiaş ca a romboedrului primitiv, Haüy l'a numit: *Ecviax.*

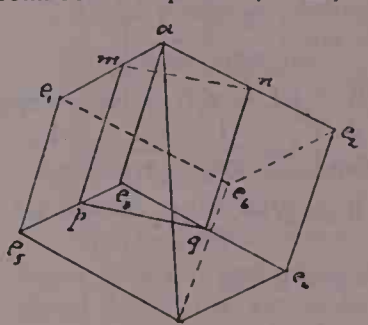


Fig. 314

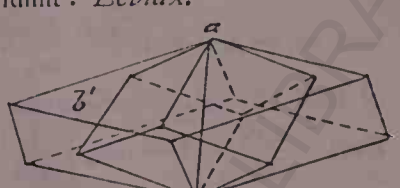


Fig. 3 5

După Naumann, acest romboedru corespunde raportului parametric: $a : a : \frac{1}{2} c$ sau notaţiei $-\frac{1}{2}$ R. Pentru Bravais avem: $\infty a : a : \bar{a} : \frac{1}{2} c$ sau $\langle 0\,1\bar{1}\,2 \rangle$. şi după Miller: $a : a : \infty a$ sau (110).

Polii feţelor acestui romboedru cad la intersecţia cercului mare care trece prin doi poli ai romboedrului primitiv, cu porţiunele negative a axelor lui Miller.

b) *Modificaţii disimetrice.* Să considerăm planul *mupq* paralel cu muchea ae_3, luând distanţele: $am = \frac{1}{z} b$, $an = \frac{1}{y} b$. Simbolul feţei va fi:

$$b^{\frac{1}{o}} b^{\frac{1}{y}} b^{\frac{1}{z}} \text{ sau } b^{\frac{z}{y}}.$$

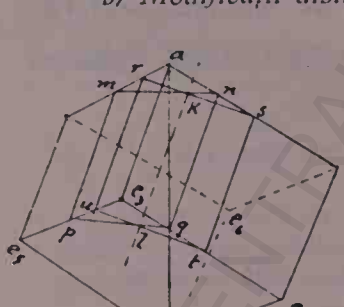


Fig. 316

Pentru rezon de simetrie va trebui un alt plan rstu, care ia aceleaşi distanţe pe muchile *b* însă în ordin invers. Inlocuim astfel muchea ae_3 prin două planuri (Fig. 316). Dacă facem aceiaş operaţiune pe cele 6 muchi ale romboedrului, vom obţine un *Scalenoedru* pe muchile *b*.

Putem ave scalenoedre directe sau inverse după cum vom ave: $z > 2y$ sau $z < 2y$.

Aşa: $b^{\frac{1}{o}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{6}} = b^3$ dă: $6 > 2 \times 2$ Scal. direct.

$b^{\frac{1}{o}} b^{1} b^{\frac{1}{4}} = b^{1}$ « $4 > 2 \times 1$ « «

şi $b^{\frac{1}{o}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}}$ « $3 < 2 \times 2$ « invers.

$b^{\frac{1}{o}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}$ « $4 < 2 \times 3$ « «

Fiind dat : $\frac{1}{2}a : a : \frac{1}{3}\bar{a} : \frac{1}{4}c$ avem : după Bravais : ⟨2 1$\bar{3}$4⟩ şi după Miller : ⟨310⟩. Scalenoedrul este direct căci avem : $h > k$, $q > 2r$. — După Naumann avem direct : $\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{4}c$ sau $\frac{3}{2}a : a : \frac{3}{4}c$. de unde notaţia : $+\frac{3}{4}R\frac{3}{2}$. — Prin transformaţie avem :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{h+k}{l}R\frac{h+k}{h} \text{ sau : } \frac{2+1}{4}R\frac{2+1}{2} \\ \frac{q-s}{q+r+s}R\frac{q-s}{q-r} \text{ sau : } \frac{3-0}{3+1+0}R\frac{3-0}{3-1}\end{array}\right\} +\frac{3}{4}R\frac{3}{2}$$

— Pentru a ave isosceloedre, e de ajuns a ave : $z = 2y$.

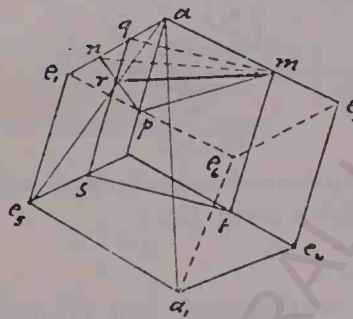


Fig. 317

In adevăr : am văzut că dacă înlocuim unghiul culminant a prin planuri, şi dacă intersecţia acestor planuri cu planul orizontal a triunghiului ecvilateral a romboedrului este paralel cu una din medianele acestui triunghiu, solidul obţinut este un isosceloedru. In cazul actual ⟨Fig. 317⟩. dacă planul dus paralel cu muchea ae_3 trece prin m, aşa că : $am = \frac{1}{y}b$, acest plan trebue să treacă şi prin r mijlocul lui np şi prin q mijlocul lui $an = \frac{1}{y}b$, căci qs trebue să fie paralel cu ae_3. Deci : $am = 2aq$ sau : $\frac{1}{y} = 2 \times \frac{1}{z}$ şi deci : $z = 2y$.

In acest caz nu avem de cât un singur isosceloedru.

$$b\,{}^{1}_{0}\,b^{1}\,b^{\frac{1}{2}} \text{ sau } b^2$$

corespunzind raportului parametric : $2a : 2a : \bar{a} : \frac{2}{3}c$ sau, după Bravais : ⟨1 1$\bar{2}$3⟩ şi după Miller : ⟨210⟩. După Naumann avem direct : $\frac{2}{3}R2$ şi prin transformări plecând de la Bravais sau Miller :

$$\frac{h+k}{l} R_2 \text{ sau } \frac{1+1}{3} R_2 \text{ sau } \frac{2}{3} R_2;$$

$$\frac{q-r}{q+r+s} R_2 \text{ sau } \frac{2-0}{2+1+0} R_2 \text{ sau } \frac{2}{3} R_2.$$

B) *Modificații pe muchiile d.* Aceste modificații pot fi: a) Simetrice și b) Disimetrice.

a) *Modificații simetrice.* Să considerăm un plan paralel cu

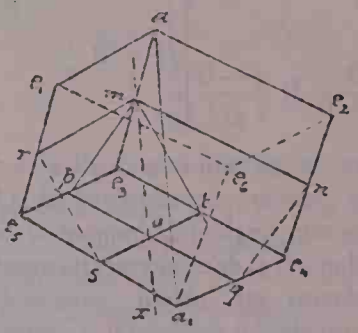


Fig. 318

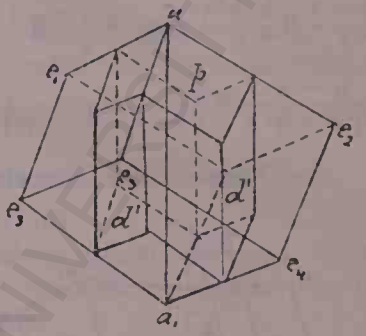


Fig. 319

una din muchiile *d* luând pe celelalte două, distanțe proporționale cu lungimele lor (Fig. 318). Vom obține astfel fața:

$$b^{\frac{1}{1}} o\, b^{\frac{1}{1}} d^{\frac{1}{1}} = d^1.$$

Fiind că sunt 6 muchii vom obține 6 fețe, care sunt verticale fiind că intersecția lor *mx* este paralelă cu axa aa_1. Solidul care rezultă este: *prizma hexagonală* d^1 (Fig. 319).

După Naumann, această prismă corespunde raportului parametric: a : 2a : ∞c sau ∞R2. Pentru Bravais avem: a : 2 a : $\bar{a}$: ∞c

După Miller: a : ∞ a : $\bar{a}$ sau (1 0 $\bar{1}$).

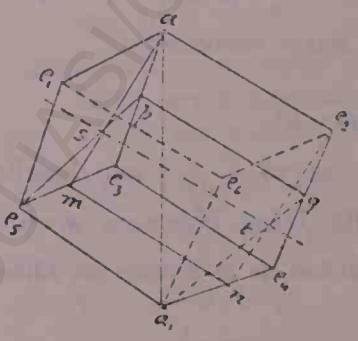


Fig. 320

Proiecția polilor fețelor acestei prizme se găsesc pe circonferența cercului de proiecțiune, la extremitățile pozitive și negative a axelor lui Bravais.

b) *Modificații disimetrice.* Să considerăm planul ae_2nm, paralel cu muchea e_3e_4, care ia distanțele $ae_3 = b$ și $e_3m = \frac{1}{z} d$. Simbolul feței va fi: $b^1\, d^{\frac{1}{1}} o\, d^{\frac{1}{z}} = d^1$. Pentru rezon de

simetrie trebue un alt plan a_1e_5pq, care tae faţa precedentă după *st*, paralelă cu e_3e_4 (Fig. 320). Vom obţine deci un solid cu 12 feţe, a cărui intersecţii laterale sunt paralele cu muchiile laterale ale romboedrului, ceia ce ne va da un nou *Scalenoedru.*

De astă dată nu avem de cât scalenoedre directe, precum: $b^1 d^{\frac{1}{0}} d^{\frac{1}{2}} = d^2$, $b^1 d^{\frac{1}{0}} d^{\frac{1}{3}} = d^3$. Acestor scalenoedre corespund raporturile parametrice şi notaţiunele Bravais şi Miller:

$$\frac{1}{2}\,a : a : \frac{1}{3}\,\bar{a} : c \text{ sau: } \langle 2\,1\bar{3}\,1\rangle \text{ şi } \langle 2\,0\bar{1}\rangle$$

$$\frac{1}{3}\,a : a : \frac{1}{4}\,\bar{a} : \frac{1}{2}\,c \text{ sau: sau: } \langle 3\,1\bar{4}\,2\rangle \text{ şi } \langle 3\,0\bar{1}\rangle.$$

După Naumann avem direct:

$$\frac{1}{2}\,a : \frac{1}{3}\,a : c \text{ sau } \frac{3}{2}\,a : a : 3c \text{ sau } {}_3R\frac{3}{2}.$$

şi

$$\frac{1}{3}\,a : \frac{1}{4}\,a : \frac{1}{2}\,c \text{ sau } \frac{4}{3}\,a : a : 2c \text{ sau } {}_2R\frac{4}{3}.$$

Prin transformare avem:

$$\frac{2+1}{1}\,R\frac{2+1}{2} \text{ sau } \frac{2-\bar{1}}{2+0+\bar{1}}\,R\frac{2-\bar{1}}{2-0} \text{ sau } {}_3R\frac{3}{2} \text{ şi}$$

$$\frac{3+1}{2}\,R\frac{3+1}{3} \text{ sau } \frac{3-\bar{1}}{3+0+\bar{1}}\,R\frac{3-\bar{1}}{3-0} \text{ sau } {}_2R\frac{4}{3}.$$

Nu sunt isosceloedre corespunzetoare acestor scalenoedre.

Polii feţelor acestor scalenoedre pe muchile *d*, se găsesc cuprinşi între polii romboedrului primitiv şi polii feţelor deuteroprizmei.

VI

Sistemul Clinorombic

După Levy, forma primitivă a acestui sistem este: *prizma oblică cu bază de romb.*

Se aşază de ordinar această prizmă aşa ca baza superioară să fie înclinată d'indărăpt înainte şi ca diedrul lateral obtuz să fie în faţă. (Fig. 321) Elementele acestei prizme sunt: 2 baze *p* care sunt nişte romburi şi 4 feţe laterale *m* care sunt nişte paralelograme. Muchile sunt de mai multe specii: muchile AB şi AD sunt identice, corespund la diedre ascuţite şi sunt notate *b*; pe când muchile BC şi CD sunt egale, corespund la diedre obtuze şi sunt notate *d*. Muchile laterale sunt asemenea de două specii: mu-

chile BF şi DH corespund la diedre ascuţite şi sunt notate *g*. pe când AE şi CG sunt obtuze şi notate *h*. Unghiurile solide sunt de asemenea de 3 feluri: A şi G egale şi notate *a*; C şi E egale şi notate *o*, pe când B, D, F, H sunt egale şi notate *e*.

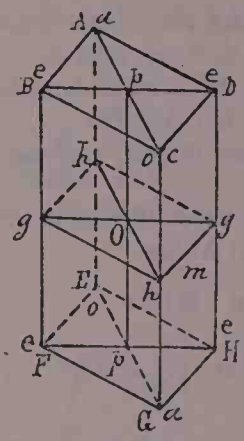


Fig. 321

Axele lui Levy sunt dreptele care reunesc centrele feţelor opuse şi sunt paralele cu cele trei muchi ce formează un unghiu solid. Ele se obţin prin intersecţia planurilor care trec prin mijlocurile muchilor bazice opuse şi sunt paralele cu feţele prizmei. (Fig. 322) In acest caz axa verticală care uneşte centrele celor două baze se chiamă *axa principală*, iar celelalte două sunt *axele laterale*. Dacă ducem planuri care să treacă prin muchile laterale opuse, ele se întretae după axa principală şi alte două axe laterale, care unesc mijlocurile muchilor laterale opuse şi sunt paralele cu diagonalele rombului de bază. (Fig. 321)

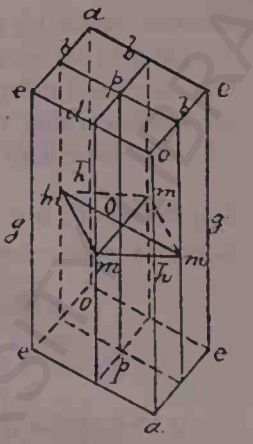


Fig. 322

Din aceste două axe, după poziţia dată prizmei, acea care reuneşte muchile *g* este orizontală, pe când cealaltă este înclinată d'indărăpt înainte.

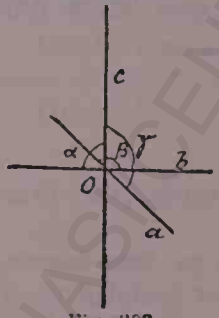


Fig. 323

— După Naumann, acest sistem numit: *Monoclinic*, este caracterizat prin un sistem de trei axe, din care: o axă verticală numită *axa principală*, o axă orizontală perpendiculară pe axa principală, numită: *Ortodiagonală* şi a treia axă, normală la ortodiagonală, dar oblică faţă de axa principală şi care se chiamă *Clinodiagonală*. (Fig. 323) Dacă însemnăm cu α, β, γ, unghiurile axelor avem:

$$\alpha = \beta = 90^0 \quad \text{şi} \quad \gamma > < 90^0.$$

Parametrii corespunzători axelor sunt: *a* pentru clinodiagonală, *b* pentu ortodiagonală şi *c* pentru axa principală. Pentru

a arată că o formă se rapoartă la orto sau clinodiagonală se întrebuinţază semnele : — şi \ care se pun deasupra simbolului ca şi la sistemul ortorombic.

— După Naumann prizma clinorombică se numeşte *Prizma monoclinică* şi corespunde raportului parametric : a : b : ∞c, de unde notaţiunea : ∞ P.

Feţele de bază *p*, care se numesc feţe de *Bazipinacoid* corespund raportului parametric : a : b : 0c şi sunt notate : 0P.

Notaţiunea după Miller se face în raport cu aceleaşi axe ca a lui Naumann, aşa că vom ave pentru feţele de prizmă notaţiunea ⟨110⟩ şi pentru bazipinacoid : ⟨001⟩.

— Chestiunele relative la proiecţiuni precum şi la calculele cristalografice vor fi tratate la fine în raport cu formele studiate.

— Prizma monoclinică are ca plan de simetrie planul care trece prin clinodiagonală şi muchile *h* şi ca axă de simetrie, axa orizontală care are o simetrie binară. Din această cauză feţele sunt simetrice numai în raport cu planul de simetrie şi fiindcă formele nu sunt întregi, dar numai pe jumătate, Naumann le dă numele de *Hemiforme*. Ele sunt *anterioare* sau *negative* când corespund lui γ obtuz şi *posterioare* sau *pozitive* când corespund lui γ ascuţit.

Prizma monoclinică ne având de cât un plan de simetrie, nu poate da de cât forme holoedrice. Ele se pot obţine : 1⁰ Prin modificări pe muchi şi 2⁰ prin modificări pe unghiuri.

1. Modificări pe muchi

Modificările pe muchi sunt de două feluri : A⟩ Pe muchile bazice şi B⟩ Pe muchile laterale.

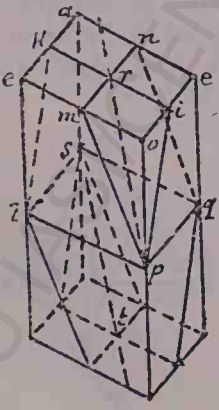


Fig. 324

A⟩ *Modificări pe muchile bazice.* Aici nu avem de cât modificaţii simetrice şi pot avec loc : 1⟩ Pe muchile *d* şi 2⟩ Pe muchile *b*.

1⟩ Dacă înlocuim muchile bazice *d* prin planuri paralele cu aceste muchi şi care ieu pe celelalte muchi distanţe proporţionale

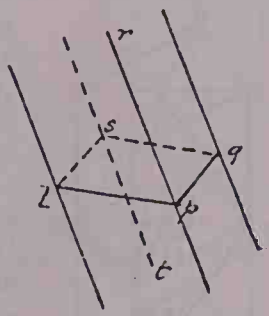


Fig. 325

cu lungimele lor, se obţin 4 feţe notate : $d^{\frac{1}{0}}$ $d^{\frac{1}{x}}$ $h^{\frac{1}{y}}$ sau $d^{\frac{y}{x}}$ care se taie două câte două sus şi jos după dreptele *pr* şi *st* ⟨Fig. 324⟩. Aceste 4 feţe determină o zonă închisă pe de lături, deschisă la capete şi inclinată în direcţiunea *pr* ⟨Fig. 325⟩

— După Naumann aceste feţe corespund raportului parametric : a : b : mc şi fiind că corespund unghiului obtuz, se numesc feţe de *Protohemipiramidă anterioară negativă* şi sunt notate : — m P. Când m = 1 notaţia este — P. După Miller avem : ⟨mm1⟩ sau ⟨111⟩.

Piramida pentru care m = 1 se numeşte : *fundamentală*.

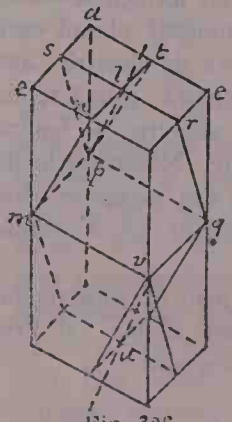


Fig. 326

2⟩ Dacă facem modificaţii analoage pe muchile *b*, ⟨Fig. 326⟩ vom obţine o altă zonă de 4 feţe inclinate, paralele cu intersecţia *lp*, a căror notaţiune este : $b^{\frac{1}{0}}$ $b^{\frac{1}{x}}$ $h^{\frac{1}{y}}$ sau $b^{\frac{y}{x}}$ ⟨Fig. 327⟩. După Naumann aceste feţe corespund raportului parametric : $\frac{a}{0}$: b : mc şi formează : *protohemipiramida posterioară pozitivă* notată : + mP sau ⟨$\overline{m}$ m 1⟩ după Miller :

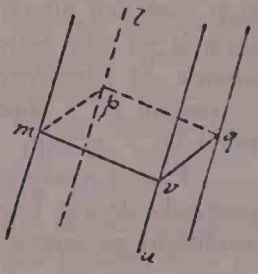


Fig. 327

Dacă considerăm în acelaş timp modificaţiile pe muchile *d* şi pe muchile *b* ⟨Fig. 328⟩ se obţine un *octaedru oblic cu baza de romb* care are 8 feţe, care sunt triunghiuri scalene, din care 4 feţe $d^{\frac{y}{x}}$ şi celelalte $b^{\frac{y}{x}}$ ⟨Fig. 329⟩. După Naumann solidul se numeşte : *Protopiramida* şi are notaţiunea : ± m P,

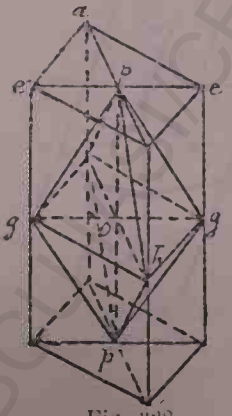


Fig. 328

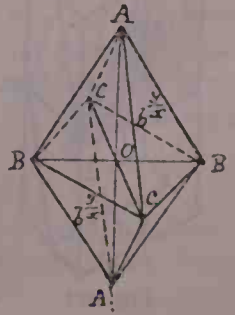


Fig. 329

B⟩ *Modificaţii pe muchile laterale.* Ele pot fi de două feluri :

a) *Modificații simetrice*, care pot ave loc: pe muchile *h* sau pe muchile *g*.

1) Să înlocuim muchile laterale *h* prin planuri paralele cu aceste muchi, luând pe muchile bazice distanțe proporționale cu lungimea lor (Fig. 330). Vom obține două fețe, $h^{\frac{1}{0}} b^{\frac{1}{\infty}} b^{\frac{1}{\infty}}$ sau h^1. Solidul care rezultă din combinarea fețelor prizmei cu fețele h^1, are aspectul unei prizme hexagonale oblice (Fig. 331.

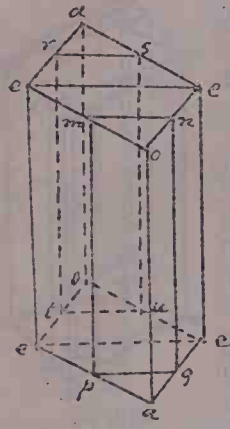


Fig. 330

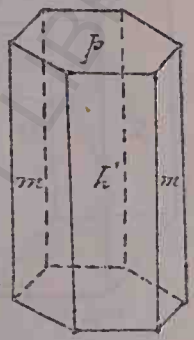


Fig. 331

După Naumann aceste fețe corespund raportului parametric: a : ∞b : ∞c și fiind că sunt paralele cu ortodiagonala, se numesc fețe de *Ortopinacoid*, notate: ∞P$\breve{\infty}$.

După Miller avem notațiunea: (100).

2) Dacă facem aceiaș modificație pe muchile *g*, vom obține fețele $g^{\frac{1}{0}} b^{\frac{1}{\infty}} d^{\frac{1}{\infty}}$ sau g^1, (Fig. 332) care, combinate cu fețele protoprizmei dau un solid, care are forma unei prizme hexagonale oblice (Fig. 333).

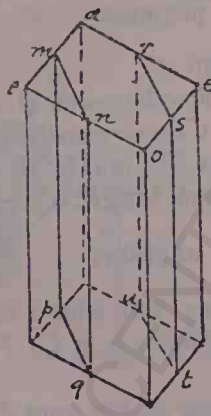


Fig. 332

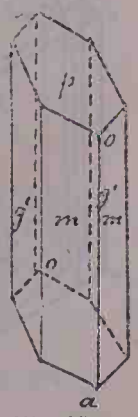


Fig. 333

După Naumann fețele *g*¹ corespund raportului parametric: ∞ a : b : ∞ c și sunt notate ∞P$\breve{\infty}$. Se numesc fețe de *clinopinacoid*, fiind paralele cu clinodiagonala.

După Miller ele sunt notate: (010).

Dacă considerăm în același timp modificațiile pe muchile *h* și *g*, se obține un solid cu formă prizmatică oblică cu bază de dreptunghiu care e considerată de unii cristalografi ca forma primitivă a acestui sistem. (Fig. 334) Această prizmă este combinarea celor trei pinacoizi.

b) *Modificații disimetrice*. 1) Fie planul *ts* c_4 c_2 paralel cu

muchea h, interceptând pe muchile d lungimele : $ot = d^{\frac{1}{x}}$, $oe_2 = d^1$.

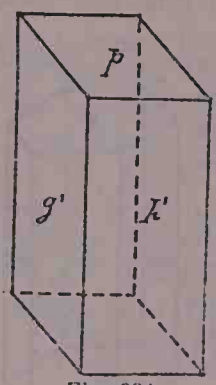


Fig. 334

Pentru rezon de simetrie va trebui un al plan pqe_3e_1 care să iee : $op = d^{\frac{1}{x}}$ $ce_1 = d^1$. ⟨Fig. 335⟩ Aceste feţe vor fi notate : $d^1\, d^{\frac{1}{x}} h^{\frac{1}{o}}$ sau h^x. Ele se taie după dreapta xy, paralelă cu axa verticală. Dacă facem aceiaşi modificaţie şi pe cealaltă muche h, vom obţine un solid prizmatic, a cărui bază este un romb lungit în direcţiunea ortodiagonalei şi care se numeşte : *ortoprismă*.

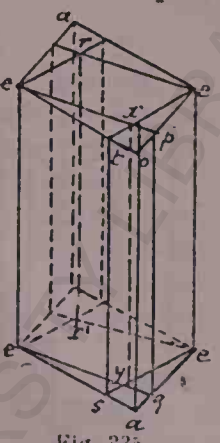


Fig. 335

După Naumann această prizmă corespunde raportului parametric : a : mb : ∞ c şi va ave notaţiunea : $\infty P\bar{m}$. După Miller : ⟨m 10⟩.

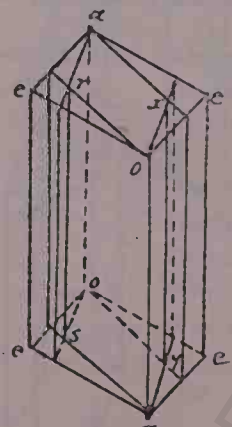


Fig. 336

2⟩ Dacă facem aceiaşi modificaţie pe muchile g, vom obţine o altă prizmă.

$$g^{\frac{1}{o}}\, b^1\, d^{\frac{1}{x}} \text{ sau } g^x.$$

Ea va fi tungită după clinodiagonală şi se numeşte după Naumann : *Clinoprismă* ⟨Fig. 336⟩. Raportul parametric va fi : ma : b : ∞ c deci notaţiunea : $\infty \breve{P}m$. După Miller : ⟨1 m o⟩.

2. Modificaţii pe unghiuri

Aceste modificaţii sunt de trei feluri : A⟩ Pe unghiurile e ; B⟩ Pe unghiurile a şi C⟩ Pe unghiurile o.

A⟩ *Modificaţii pe unghirile e*. Ele sunt de două feluri : a⟩ Simetrice şi b⟩ Disimetrice.

a⟩ *Modificaţii simetrice*. Cele patru unghiuri e ale prizmei clinorombice fiind egale le putem modifica în acelaş timp prin planuri care interceptează pe cele trei muchi ce le formează, distanţe proporţionale cu lungimele lor ⟨Fig. 337⟩. Aceste feţe vor fi notate : $b^{\frac{1}{x}} d^{\frac{1}{x}} g^{\frac{1}{y}}$ sau $e^{\frac{y}{x}}$. Aceste feţe tae bazele prizmei după drepte paralele cu clinodiagonala ⟨mn ∥ pq ∥ ao⟩ şi dau naş-

tere la un solid prizmatic lungit după clinodiagonală ⟨Fig. 338⟩

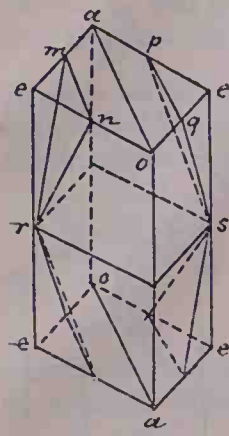


Fig. 337

După Naumann aceste fețe corespund raportului parametric: ∞a : b : mc. Se cheamă fețe de *Domă* și fiind că ele sunt paralele cu clinodiagonala, solidul se numește *Clinodomă* și este notat: $mP\bar{\infty}$. După Miller: notațiunea: ⟨0m1⟩.

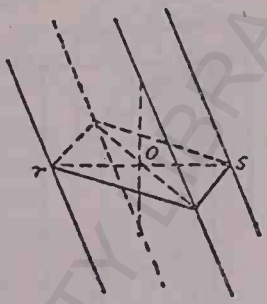


Fig. 338

b⟩ *Modificații disimetrice.* Fie planul *mnp* care modifică un unghiu *e* luând pe cele trei muchi care-l formează, distanțele $em = d^{\frac{1}{x}}$, $en = b^{\frac{1}{y}}$, $ep = g^{\frac{1}{z}}$. Această față va fi notată: $d^{\frac{1}{x}} b^{\frac{1}{y}} g^{\frac{1}{z}}$. Pentru rezon de simetrie, va trebui o altă față: pqr, care să ia: $eq = d^{\frac{1}{y}}$, $er = b^{\frac{1}{x}}$, $ep = g^{\frac{1}{z}}$ Aceste două fețe vor ave ca intersecție dreapta *ps* ⟨Fig. 339⟩. Vom înlocui deci unghiul *e* prin două fețe. Dacă înlocuim toate unghiurile *e* în același mod vom obține o piramidă lungită după clinodiagonală și care se chiamă după Naumann: *clinopiramidă* ⟨Fig. 340⟩. Fețele sale sunt de două specii: cele patru care corespund unghiului obtuz formează o: *hemiclinopiramidă anterioară negativă* și corespund raportului parametric: na : b : mc, de unde notațiunea: $-mP\bar{n}$ și după Miller: ⟨m mn n⟩; iar celelalte fețe corespunzetoare unghiului γ ascuțit, formează o: *hemiclinopiramidă posterioară pozitivă* corespunzind raportului parametric: $n\bar{a}$: b : mc sau notațiunea: $+mP\bar{n}$ și după Miller: ⟨$\bar{m}$ mn n⟩.

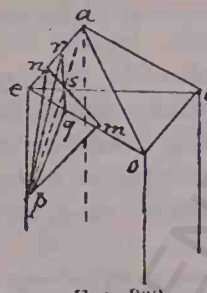


Fig. 339

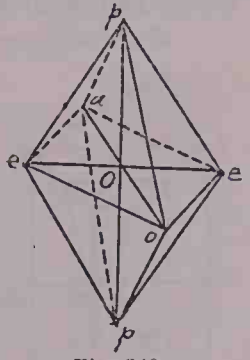


Fig. 340

B. *Modificaţii pe unghiurile* a. Ele sunt : a) simetrice şi b) disimetrice.

a) *Modificaţiuni simetrice.* Fiind că nu sunt de cât două unghiuri *a*, vom obţine feţele care sunt notate după Levy $a^{\frac{v}{x}}$ (Fig. 341) şi care se chiamă, după Naumann, feţele unei *Hemiortodome posterioare pozitive*, corespund raportului parametric : ā : ∞b : mc şi sunt notate : $+mP\overline{\infty}$, şi după Miller : ⟨$\bar{m}$01⟩.

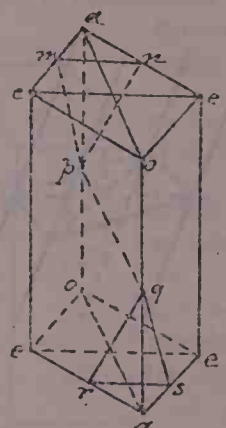


Fig. 341

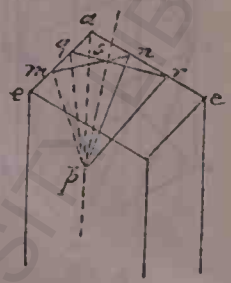


Fig. 311

b) *Modificaţii disimetrice.* Prin modificaţii disimetrice analoage cu acele ce am făcut pe unghiurile *o* se obţin feţele $b^{\frac{1}{x}}\,b^{\frac{1}{y}}\,h^{\frac{1}{z}}$, a unei *hemiortopiramide posterioară* (Fig. 342), corespunzind, după Naumann, raportului parametric : ā : nb : mc, de unde notaţiunea : $+mP\overline{n}$, sau după Miller : ⟨$\overline{mn}$ m n⟩

C. *Modificaţii pe unghiurile* o. Ele sunt de asemenea : a) simetrice şi b) disimetrice.

a) *Modificaţii simetrice.* Pe unghiurile *o* vom obţine două feţe notate : $d^{\frac{1}{x}}\,d^{\frac{1}{x}}\,h^{\frac{1}{y}}$ sau $O^{\frac{v}{x}}$ (Fig. 343). Ele se chiamă după Naumann : feţe de *Hemiortodomă anterioară* şi corespund raportului parametric : a : ∞b : mc şi sunt notate — $mP\overline{\infty}$. După Miller : ⟨m01⟩.

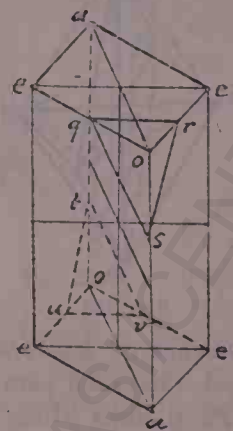


Fig. 313

Dacă considerăm în acelaş timp modificările simetrice pe unghiurile *a* şi o obţinem un solid prismatic culcat paralel cu diagonala orizontală şi care este *Ortodoma* (Fig. 344).

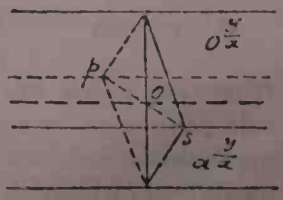


Fig 311

— Dacă facem în acelaş timp modificările pe unghiurile *o*

a şi *o*, se obţine un *Octaedru oblic cu bază de dreptunghiu* ⟨Fig. 345⟩ a cărui feţe sunt de trei feluri: de clinodomă, de hemiortodomă anterioară şi de hemiortodomă posterioară.

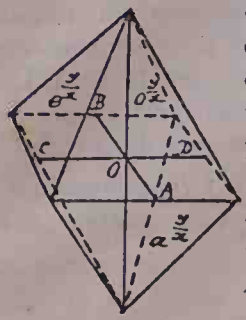


Fig. 345

b) *Modificaţii disimetrice.* Pe unghiurile *o*, se obţin feţele de *hemiortopiramidă anterioară* notate: $d^{\frac{1}{x}}\ b^{\frac{1}{y}}\ b^{\frac{1}{z}}$, ⟨Fig. 346⟩ corespunzând raportului parametric: a : nb : mc, de unde notaţiunea după Naumann: $-mP\overline{n}$

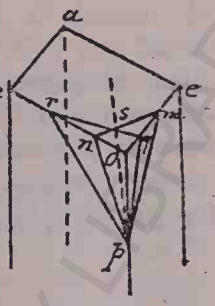


Fig 346

Pentru a obţine proiecţiunea polilor feţelor diverselor forme a acestui sistem, să considerăm un solid compus din principalele feţe, precum: faţa: abcd de prizmă,

» aefc » ortopinacoid
» bdhg » clinopinacoid
» bgkl » clinodomă
» ablm » piramidă
» amne » ortodomă, iar deasupra faţa de bazi-

pinacoid. ⟨Fig. 347⟩ Dacă solidul este înscris în sfera de proiecţiune atunci putem proiecta polii feţelor diverselor forme a acestui sistem, fie pe un plan perpendicular pe axa principală, fie pe un plan care ar trece prin axa principală şi clinodiagonală şi care ar fi paralel cu clinopinacoidul.

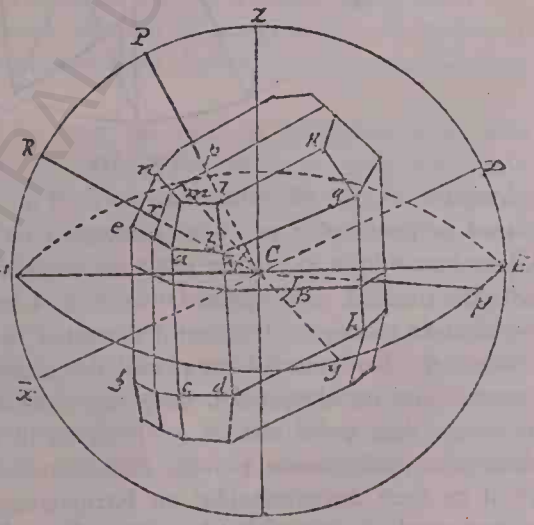


Fig. 317

Dacă din centrul acestui solid, care se confundă cu centrul sferei, scoborâm perpendiculare pe diver

ele fețe și le prelungim până ce ele întâlnesc sfera, observăm că: normala la bazipinacoid face cu clinodiagonala un unghiu de 90^0; că polii bazipinacoidului, a ortodomei și a ortopinacoidului, se găsesc pe același cerc mare, adică sunt în zonă. De asemenea sunt în zonă: polii fețelor de bazipinacoid cu protopiramida și protoprizma. Vom ave deci de examinat două cazuri:

1) *Proiecțiunea pe planul paralel cu Clinopinacoidul.* Fie $z\,E\bar{z}\,E'$ planul cercului de proiecțiune, care conține axa

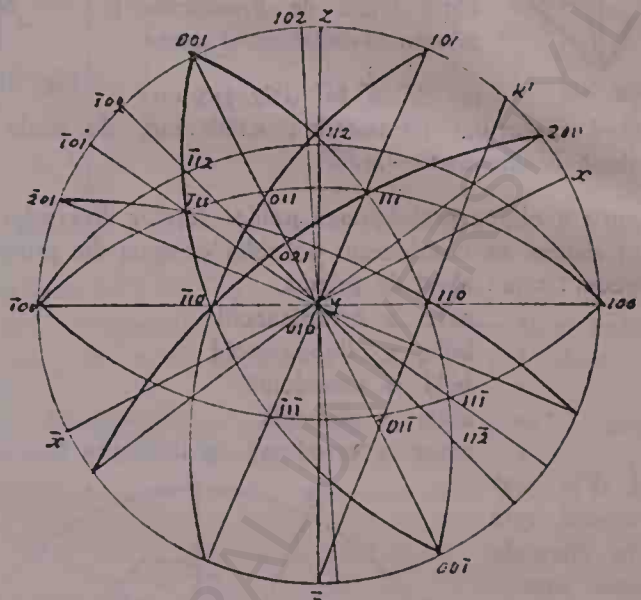


Fig. 348

principală $z\bar{z}$ și clinodiagonala $x\bar{x}$. (Fig. 348) Este evident că planul perpendicular pe axa principală va conține polii Orto și Clinopinacoidului și se va projecta după diametrul perpendicular pe axă, trecând prin centru, iar polii *Ortopinacoidului* se vor projecta la extremitățile acestui diametru în (100) și ($\bar{1}00$). *Clinopinacoidul* fiind paralel cu planul de projecțiune, este aplicat la extremitatea ortodiagonalei, care este normală la planul de projecțiune: deci polul său se va projecta în centru (010). Pentru a determina projecțiunea polului *Bazipinacoidului*, se măsură unghiul ce face ortopinacoidul cu bazipinacoidul, a cărui supliment α este unghiul normalelor la aceste fețe. Fiind că projecțiunea polului ortopinacoidului este determinată, plecând de la acest pol

($\bar{1}00$), luăm arcul ($\bar{1}00$—001) egal cu α şi în (001) se găseşte proiecţiunea polului bazipinacoidului.

Fiind că feţele de *Prizmă* sunt în zonă cu orto şi clinopinacoidul, polii lor vor căde pe diametrul orizontal între ⟨010⟩ şi ⟨100⟩ sau ⟨$\bar{1}$ 0 0⟩. Pentru a determina proiecţiunea lor, se măsură diedrul $g\delta$ al protoprizmei cu Clinopinacoidul; suplimentul acestui unghiu β, reprezintă unghiul normalelor la feţele prizmei şi a clinopinacoidului, măsurat prin arcul yP'. Rabatând atunci cercul orizontal E'yp'E în jurul lui EE', aşa ca y să ajungă în z, punctul de vedere ajunge în $\bar{z}$, şi arcul yp' vine de la z spre x până în p'. Unind punctele p' şi $\bar{z}$ se obţine cu diametrul orizontal o intersecţie care reprezintă proiecţia polului feţei de protoprizmă : ⟨110⟩.

Dacă facem să treacă prin polii bazipinacoidului şi a prizmei un cerc mare, atunci piramida fiind în zonă cu bazipinacoidul şi prizma, polul ei se va găsi pe cercul mare ce trece prin cei doi poli. Pentru a determiua poziţiunea polilor, atât a Protopiramidei cât şi a tuturor piramidelor, este de ajuns a determina unghiul pe care aceste piramide'l fac cu bazipinacoidul, de a lua suplimentele lor şi apoi plecând de la ⟨001⟩ de a lua spre polul prizmei, arcuri egale cu aceste suplimente. Astfel vom găsi polii ⟨111⟩ ⟨112⟩ etc.

Ortodoma fiind în zonă cu bazi şi ortopinacoidul, polul seu se va găsi pe circonferenţa cercului de proiecţiune, poziţiunea sa va fi determinată ca pentru piramide. Aşa avem polii ortodomelor : ⟨201⟩ ⟨101⟩ ⟨102⟩ etc.

Clinodoma fiind în zonă cu bazi şi clinopinacoidul, este evident că polul seu se va găsi pe diametrul ce trece prin bazipinacoid şi centru, unde este clinopinacoidul. Pentru a determina poziţiunea sa, vom măsura unghiul ce face clinodoma cu bazipinacoidul, vom lua suplimentul, vom rabate cercul ce trece prin normala la bazipinacoid şi polul feţei în jurul diametrului ⟨001—00$\bar{1}$⟩, Atunci polul cade pe circonferenţa cercului de proiecţiune la o distanţă ⟨001⟩ — c, egală cu suplimentul determinat, pe când punctul de vedere vine la extremitatea x a clinodiagonalei. Unind c cu $\bar{x}$, obţinem cu diametrul (001) — (0 0 $\bar{1}$) intersecţia care determina poziţia proiecţiei polului feţei de clinodemă ⟨021⟩ sau ⟨011⟩ etc.

2) *Proiecţiunea pe planul perpendicular la axa principală.* Axa principală fiind perpendiculară pe planul de proiecţiune se va

projecta în centrul cercului de proiecţiune. ⟨Fig. 349⟩. Polii prizmelor, a orto şi clinopinacoidului fiind în zonă şi situaţi în planul cercului de proiecţiune, vor ave proiecţiunele lor pe circonferenţa acestui cerc. Cercul care trece prin axa principală şi ortodiago-

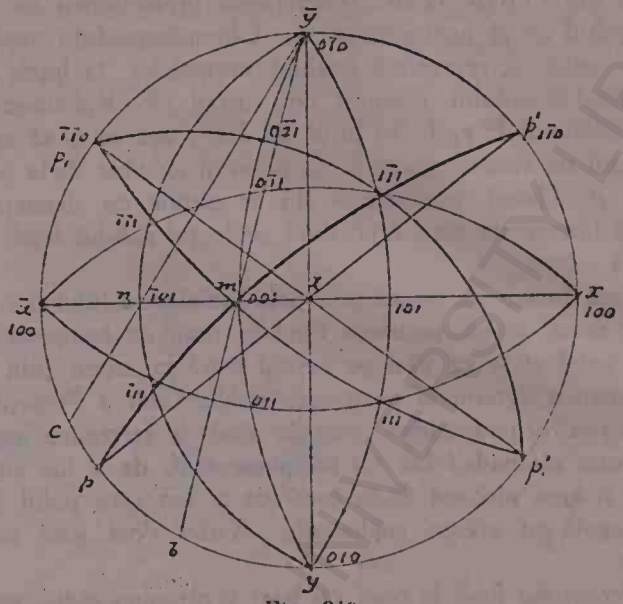


Fig. 349

nala fiind perpendicular pe planul de proiecţiune se va projecta după un diametru, la extremităţile căruia se vor găsi polii clinopinacoidului (010) şi (0$\bar{1}$0). Cercul care trece prin axa principală şi polii ortopinacoidului se va projecta după un alt diametru perpendicular pe cel întâi, la extremităţile căruia se vor projecta polii ortopinacoidului (100) şi ($\bar{1}$00).

Pentru a projecta polul bazipinacoidului observăm că: acest pol trebue să se găsească pe diametrul x$\bar{x}$, fiind că bazipinacoidul este în zonă cu ortopinacoidul. Şi fiind că normala la planul bazipinacoidului nu coincide cu axa principală, este evident că polul seu nu va fi în centru. Atunci, măsurând diedrul format de bazipinacoid cu ortopinacoidul, luăm suplimentul seu α, şi de la $\bar{x}$ spre y luăm arcul $\bar{x}b = \alpha$, şi unind pe b cu $\bar{y}$, unde este punctul de vedere, obţinem cu x$\bar{x}$ intersecţia m, unde va fi polul bazipinacoidului ⟨001⟩.

Ortodoma fiind în zonă cu bazi şi ortopinacoidul, polul seu se va projecta între acel al bazi şi a ortopinacoidului. Măsurăm

unghiul format de ortopinacoid cu ortodoma, luăm suplimentul şi plecând de la $\bar{x}$ spre y vom duce valoarea acestui supliment până în *c*; unind *c* cu *y*, vom găsi intersecţia *n* unde se găseşte polul ortodomei ($\bar{1}$ 0 1).

Polul clinodomei se va găsi pe cercul care trece prin bazi- şi clinopinacoid, şi va fi determinat ca pentru ortodomă. Aşa se obţin polii: ⟨011⟩ ⟨021⟩ etc.

Polul prizmei se găseşte pe circonferenţa cercului de proiecţiune; pentru a determina proiecţiunea sa, vom măsura unghiul ortopinacoidului cu prizma, vom lua suplimentul şi plecând de la $\bar{x}$ spre *y*, luăm arcul $\bar{x}p$, şi în *p* se va găsi polul prizmei ⟨110⟩.

Piramidele fiind în zonă cu prizmele, polii lor se vor găsi pe diametrele la extremităţile cărora sunt polii prizmelor respective. Poziţia lor e determinată ca pentru dome: aşa sunt polii: ⟨111⟩ etc.

VII

Sistemul asimetric

După Levy, forma primitivă a acestui sistem este: *prizma hioblică*, care este un paralelipiped oarecare, înclinat în acelaşi timp d'îndărăpt înainte şi de la dreapta la stânga. ⟨Fig. 350⟩. Elementele sale sunt: 2 baze care sunt nişte paralelograme notate *p*; două feţe laterale *m* şi ate două *t*; solidul e dispus aşa că cele două feţe anterioare sunt: la dreapta *t* la stânga *m*. Muchile sunt două câte două opuse egale: muchile bazice sunt notate: *b, c, d, f* şi muchile laterale *g* şi *h*, dispuse aşa ca muchile *g*, care sunt ascuţite, să fie la dreapta şi stânga, pe când muchile obtuze *h* sunt înainte şi îndărăpt. Unghiurile solide sunt de asemenea câte două opuse şi egale şi sunt notate: *a, e, i* şi *o* şi sunt dispuse la partea superioară aşa că: *a* este îndărăpt, *e* la stânga, *i* la dreapta şi *o* înainte.

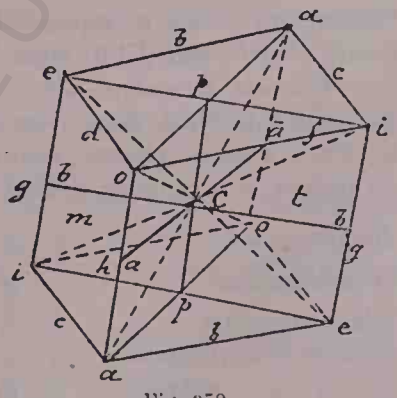


Fig. 350

Sistemul nu are de cât un centru de simetrie, în raport cu care toate elementele sunt simetrice două câte două.

După Naumann, sistemul se numeşte *Triciinic* şi este ca-

Caracterizat prin trei axe care sunt neegale şi formează între ele, unghiuri veticare. (Fig. 351) Una din aceste axe este verticală şi se numeşte *axa principală*, pe când celelalte două sunt orizontale şi neegale: una mai lungă se numeşte *macrodiagonală* şi alta mai scurtă numită *brahidiagonală*. Parametrii corespunzători sunt: *a* pentru brahidiagonală, *b* pentru macrodiagonală şi *c* pentru axa principală. Unghiurile axelor sunt: α unghiul macro cu brahidiagonala, β al axei principale cu brahidiagonala şi γ al axei principale cu macrodiagonala.

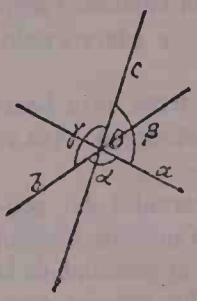


Fig. 351

Fiind că elementele de simetrie se reduc la unul singur: centrul de simetrie, toate formele acestui sistem vor fi reprezintate prin: a patra parte pentru formele piramidale şi se numesc *Tetartoforme* şi prin jumătate pentru formele prizmatice, care se numesc *Hemiforme*.

După Naumann prizma lui Levy este compusă din două *hemiprizme*: o *hemiprizmă dreaptă*, corespunzând raportului parametric a : b : ∞c şi notată: ∞*P'*, sau (110) după Miller şi o *hemiprizmă stângă*, corespunzind raportului parametric: $\bar{a}$: b : ∞c, notată: ∞^{1}*P*, sau ($\bar{1}$ 1 0) după Miller.

Formele secundare ale sistemului asimetric vor fi deduse din prizma bioblică, după cum s'a văzut la sistemul clinorombic, şi pentru a nu ne repeta, vom da numai tabloul acestor forme cu numele şi notaţiunea în cele trei sisteme de notaţiune.

Bazipinacoid	*p*	∞a : ∞b : c	*OP*		(001)
Brahipinacoid	g^1	∞a : b : ∞c	∞$\breve{P}$∞		(010)
Macropinacoid	h^1	a : ∞b : ∞c	∞P$\bar{\infty}$		(100)
Hemiprizma dreaptă	t	a : b : ∞c	∞P^1		(100)
« *stângă*	m	$\bar{a}$: b : ∞c	∞^{1}P		($\bar{1}$ 1 0)
Hemibrahiprizma dreaptă	$g\frac{x}{y}$	ma : b : ∞c	∞P$^1\breve{m}$		(1m0)
« *stângă*	$\frac{x}{y}g$	m$\bar{a}$: b : ∞c	∞^{1}P$\breve{m}$		($\bar{1}$m 0)
Hemimacroprizma dreaptă	$h\frac{y}{x}$	a : mb : ∞c	∞P'$\bar{m}$		(m 10)
« *stângă*	$\frac{y}{x}h$	$\bar{a}$: mb : ∞c	∞^{1}P$\bar{m}$		($\bar{m}$ 10)

Hemibrahidoma sup. dr. $i^{\frac{y}{x}}$ $\infty a : b : mc$ $mP'\breve{\infty}$ (0m1)

« « *st.* $e^{\frac{y}{\bar{x}}}$ $\infty a : b : m\bar{c}$ $m'P\breve{\infty}$ (0 m $\bar{1}$)

Hemimacrodoma anter. $o^{\frac{y}{\bar{x}}}$ $a : \infty b : mc$ $mP'\bar{\infty}$ (m01)

« *poster.* $a^{\frac{y}{\bar{x}}}$ $a : \infty b : m\bar{c}$ $m'P\bar{\infty}$ (m0$\bar{1}$)

Tetartopiramidă sup. dr. $f^{\frac{y}{x}}$ $a : b : mc$ mP' (mm1)

« « *st.* $c^{\frac{y}{\bar{x}}}$ $\bar{a} : b : mc$ $m'P$ ($\bar{m}$m1)

« *inf. dr.* $b^{\frac{y}{x}}$ $a : b : m\bar{c}$ mP_1 (m$\bar{m}$1)

« « *st.* $d^{\frac{y}{\bar{x}}}$ $\bar{a} : b : m\bar{c}$ m_1P ($\bar{m}$m$\bar{1}$)

brahi « *sup. dr.* $f^{\frac{1}{x}}c^{\frac{1}{y}}g^{\frac{1}{z}}$ $na : b : mc$ $mP'\breve{n}$ (m mn n)

« « *st.* $d^{\frac{1}{\bar{x}}}b^{\frac{1}{y}}g^{\frac{1}{z}}$ $n\bar{a} : b : mc$ $m_1P\breve{n}$ ($\bar{m}$ nm n)

« « *inf. dr.* $b^{\frac{1}{x}}d^{\frac{1}{y}}g^{\frac{1}{z}}$ $na : b : m\bar{c}$ $mP'\breve{n}$ (m m $\bar{n}$)

« « « *st.* $c^{\frac{1}{\bar{x}}}f^{\frac{1}{y}}g^{\frac{1}{z}}$ $n\bar{a} : b : m\bar{c}$ $m_1P\breve{n}$ ($\bar{m}$ mn $\bar{n}$)

macro « *sup. dr.* $f^{\frac{1}{x}}d^{\frac{1}{y}}h^{\frac{1}{z}}$ $a : nb : mc$ $mP'\bar{n}$ (mn m n)

« « « *st.* $d^{\frac{1}{\bar{x}}}f^{\frac{1}{y}}h^{\frac{1}{z}}$ $a : n\bar{b} : mc$ $m'P\bar{n}$ (mn $\bar{m}$ n)

« « *infer. dr.* $b^{\frac{1}{x}}c^{\frac{1}{y}}h^{\frac{1}{z}}$ $a : nb : m\bar{c}$ $mP_1\bar{n}$ (mn m $\bar{n}$)

« « « *st.* $c^{\frac{1}{\bar{x}}}b^{\frac{1}{y}}h^{\frac{1}{z}}$ $\bar{a} : nb : m\bar{c}$ $m_1P\bar{n}$ ($\bar{m}$n m $\bar{n}$)

Pentru a vede proiecţiunea polilor feţelor sistemului triclinic, să considerăm ca şi la sistemul monoclinic un solid imaginar compus din principalele feţe (Fig. 352). Aşa să fie :

abcd o faţă de protoprizmă.

bdcf « « « brahipinacoid.

achg o faţă de macropinacoid.
abkl « « « protopiramidă.
fmbe « « « brahidomă.
akgi « « « macrodomă, şi bazipinacoidul.

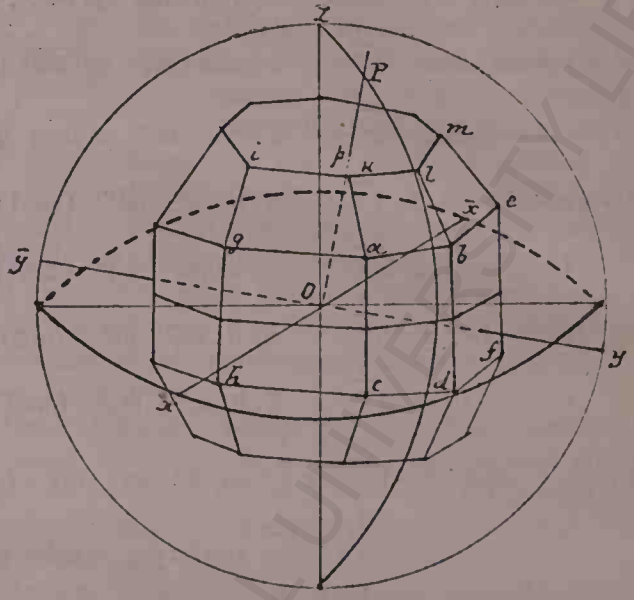


Fig. 352

Acest sistem fiind asimetric, putem face proiecţiunele pe ori şi ce plan. Se ia de ordinar planul care trece prin polii macropinacoidului, a brahipinacoidului şi a prizmelor şi care este perpendicular pe axa principală (Fig. 353). In aceste condiţiun axa principală se proiectează în centrul cercului de proiecţiune; cercul care trece prin axa principală şi polii macropinacoidului, fiind perpendicular pe planul de proiecţiune se proiectează după un diametru, la extremităţile căruia se vor găsi polii macropinacoidului ⟨100⟩ ⟨$\bar{1}$0 0⟩. Fiind că, unghiul ce face macro cu brahipinacoidul este diferit de 90°. pentru a determina poziţiunea polului brahipinacoidului, măsurăm unghiul acestor două feţe, luăm suplimentul, care reprezintă unghiul normalelor la feţe. Plecând de la ⟨100⟩ luăm pe cercul de proiecţie un arc egal cu acest supliment şi la extremitatea sa se va găsi proiecţia polului brahipinacoidului ⟨010⟩. Unind acest punct cu z şi prelungind, obţinem cel-alt pol ⟨0$\bar{1}$ 0⟩.

Prizmele fiind în zonă cu macro şi brahipinacoidul, polii lo

se vor găsi pe circonferența cercului de proiecțiune. Să presupunem că considerăm *Hemiprizma dreaptă anterioară* și măsurăm unghiul ce face această față cu macropinacoidul, luăm suplimentul acestui unghiu, și plecând de la ⟨100⟩ luăm către dreapta arcul egal cu acest supliment până în *t*, unde se va găsi polul ⟨110⟩. Unind *t* cu *z* și prelungind până în *t'* avem polul celeilalte fețe a hemiprizmei. Polii fețelor hemiprizmei anterioare stângi sunt în *m* 110) și m' ($(\bar{1}10)$).

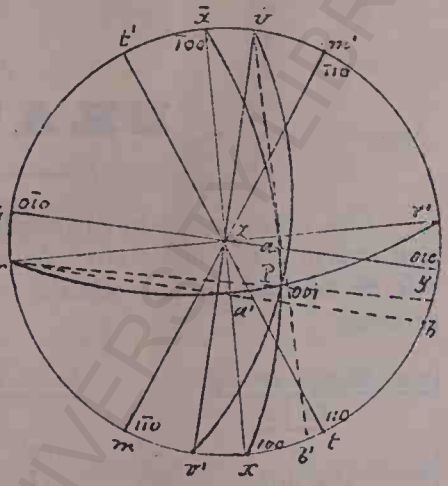


Fig. 353

Fiind că bazipinacoidul face parte din zona cu macro și brahipinacoidul, polul seu se va găsi la intersecția cercurilor care dau inclinația bazi pe macro și brahipinacoid. Pentru aceasta măsurăm inclinația bazi pe brahipinacoid, se ia suplimentul pe care-l măsurăm de la (010) în jos, ceia ce ne dă punctul b^1, pe care-l unim cu *v* extremitatea diametrului perpendicular pe (010) ($0\bar{1}0$), cu care avem intersecția *a*; prin *v*, *a* și *v'* facem să treacă un arc de cerc mare, pe care trebue să se găsească polul bazipinacoidului. Rămâne să determinăm poziținea celuilalt cerc mare; pentru aceasta măsurăm diedrul bazi cu macropinacoidul luăm suplimentul, și procedând ca mai înainte determinăm punctul *b*, pe care-l unim cu *r* și obținem intersecția a^1; prin *r*, *a'* *r'* facem să treacă un cerc mare, care întâlnește pe cel întâi în punctul P, unde este proiecțiunea polului bazipinacoidului (001).

Macrodoma fiind în zonă cu macro și bazipinacoidul, polul seu se va găsi pe cercul de zonă, la o distanță de polul macropinacoidului egală cu suplimentul unghiului ce face macrodoma cu macropinacoidul.

BCU IAȘI

ERATA

Din cauză că tipărirea acestei lucrări s'a făcut în grabă, s'au strecurat mai multe erori de tipar; pe unele le indicăm în cele ce urmează, iar pe celelalte rugăm pe cititori a le corija personal.

Pag.	Rândul de sus în jos	In loc de	să se citească
12	26	sale	lor
14	din urmă	U	V
18	Fig. 11	A din stânga	A'
20	Fig. 13	A'B	A'B'
24	32	$h^{\frac{1}{x}}$	$h^{\frac{1}{z}}$
21	24	După: egale a se intercala: ⟨Fig. 14⟩.	
26	25	a'a	a'a''
27	19	*terquaternar*	*tercvaternar*
29	26	Ox', Oy', Oz'	$O\bar{x}$, $O\bar{y}$, $O\bar{z}$
29	37	Rosse	Rose
34	13	După: cu, a se intercala: axa z şi prin urmare paralel cu	
34	19	indicii	indici
35	24	z_4	$z\bar{z}$
36	35	y Ov, z = O	y=Ov, z=o.
42	18	sin ⟨P'Q + PQ⟩ — sin PP'...	Sin ⟨P'Q + PQ⟩ = sin PP'
49	20	cercul	arcul
50	6	V^1	V^1_1
50	14	V^1	V^1_1
50	15	razei	dreptei
50	22	$V^1 V^1_1$.... V^1	VV^1_1.. V
50	31	rs's	rS's.
52	23	M^1	M_1

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul de sus în jos	în loc de	să se citească
58	11	. *h*	. *b*.
60	13	. cu	. ca
61	Fig. 60	. a'_1	. a^1.
64	20	. x y z	. $x \bar{y} z$
64	Fig. 65	. a se reuni O cu C prin o dreaptă.	
65	6	. $ac = Oa\, l'\bar{2}$	. $ac' = l'\bar{2}$.
66	16	. xyz	. $\bar{x}\, y\, z$;
67	Fig. 67	. a se scrie lângă 1 1 1 litera a	
		« $1\ \bar{1}\ 1$ « a_{II}	
		« $\bar{1}\ \bar{1}\ 1$ « a_{III}	
67	27	. a'	. a_1
67	32	. a' a'' a'''	. a_1, a_{II}, a_{III}.
68	2	. $\langle 1\ 1\ \bar{1}\rangle$	. $\langle 1\ 1\ \bar{1}\rangle$
69	1	. Oc	. Oe
70	9—10	. Icositetetraedrul	. Icositetraedrului
70	34	. OX	. Ox.
71	8	. $Om = Om_1 = m = 1$	. $Om = Om_1 = m$
72	12	. 2Oa	. $2Oa^{II}$
72	15	. Oa	. Oa^{II}
73	1	. $Om = m$	. $Om_1 = m$.
77	20	. $\langle 1 m 1\rangle$ şi s $\langle m\ \bar{1}\ 1\rangle$	. $\langle 1\ m\ 1\rangle$ şi s^1 $\langle m\ \bar{1}\ 1\rangle$.
79	7	. $cp = Cr\ \frac{180 - A}{2}$	. $cp = cr = \frac{180^0 - A}{2}$
79	17	. cos px cos py.	. cos px = cos py
79	25	. cos cy cotg $\frac{A}{2}$	. cos cy = cotg $\frac{A}{2}$
80		. a se complecta semnul = care nu a eşit la tipar	
82	18	. dată	. dat
96	12	. se suprimă : notată.	
98	5	. $zP\bar{z}$ cu cercul	. $zP\bar{z}$ faţă cu cercul
98	31	. vedere în x	. vedere în $\bar{x}$.
100	Fig. 100	. Om şi Om_1	. On şi On_1
100	26	. în formula ce dă cos $\frac{i}{2}$ să se citească :	
		în loc de $\frac{Y}{2} - \frac{X}{2} - 45^0$	. $\frac{Y}{2} + \frac{X}{2} - 45^0$
100	28	. zOu	. zOn

Pag.	rând		In loc de	A se citi
103	7	şi următoarele	Sy	. sy
103	14		Sz	. sy
104	9	şi următoarele	Sy	. sy
108	2	Deci $\cos \frac{V}{2}$ 0,13865		Deci : $\cos \frac{V}{2} = 013865$,
112	4	a se suprima : poate.		
116	Fig. 112	a se însemna z, a se duce cercul mare $xB\bar{x}$ şi a se însemna $\bar{x}$.		
117	36	.	ocservăm	. observăm.
126	21	a se suprima tri.		
127	Fig. 129	a se însemna *a* între z şi T şi c între T şi p, precum şi pe *y*.		
127	18	.	Cpy	. cpy.
128	Fig. 132	a se însemna A la vârful superior şi X muchea din stânga.		
129	6	.	triunghiului CFT	. triunghiuiui CFI.
129	12	.	X′	. X.
129	13	.	$\frac{V}{2}$	. $\frac{F}{2}$
129	15	.	$\cos \frac{V}{2}$	. $\cos \frac{F}{2}$
129	21	a se suprima ⟨Fig. 133⟩.		
129	Fig. 133	.	$\frac{X}{2} = A$	. $\frac{X'}{2} = A$.
130	1	.	dă	. dau
130	16	.	⟨4⟩	. ⟨6⟩ ⟨Fig. 133⟩.
131	1	.	ndicii	. indicii
131	2	.	itei	. tei.
131	Fig. 135	la partea inferioară a se însemna *y*.		
132	18	.	fe	. fc.
133	Fig. 136	a se însemna b la extremitatea lui zc.		
134	4	.	cas px	. cos px.
137	8	.	dodeo	. dode-
137	16	.	ty	. tg.
141	3	.	adjacate	. adjacente
143	10	.	$bz\varrho = \frac{\sin bc}{\sin \alpha}$	. $bz = \frac{\sin be}{\sin \alpha}$
143	20	.	mijiocul lor c	. mijlocul lor e.
145	6 şi 7	. a se marca semnul = între rândul 6 şi 7.		

BCU IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul	In loc de	A se citi
146	15	Cătăm	căutăm
147	8	precepent	precedent
148	28	hemedrie	hemiedrie.
150	32	deducem	ducem.
151	1	$4P''$	P''.
151	11	iat	iar.
156	21	$\langle \bar{1}\,0\,1\rangle$	$\langle \bar{1}\,0\,1\rangle$.
158	18	$r'\,z\,r_1$	$r'\,z\,r'_1$
166	Fig. 198 a se însemna litera q la extremitatea lui r'P.		
167	3	P'	P.
167	12	ieu	ia.
168	6	dreavtă	dreaptă.
168	13	4 muchi bazice lungi și 4 muchi laterale	4 muchi bazice scurte, 4 muchi bazice lungi și 4 muchi laterale.
170	22	macrodiagonal	macrodiagonală.
170	28	$\frac{A}{2}$	$\frac{A'}{2}$
171	1	$\frac{A}{2}$	$\frac{A'}{2}$
172	5	$b^1\bar{x}\,b^1\bar{y}\,h^1\bar{z}$	$b^1\bar{x}\,b^1\bar{y}\,h^1\bar{z}$ sau $b^1b^1\bar{y}\,h^1\bar{z}$ sau $a^{\bar{z}}_{\bar{y}}$
172	28	$b^1\bar{x}\,b^1\bar{y}\,g^1\bar{z}$	$b^1\bar{x}\,b^1\bar{y}\,g^1\bar{z}$ sau $b^1b^1\bar{y}\,h^1\bar{z}$ sau $c^{\bar{z}}_{\bar{y}}$
174	15	donă	două.
174	17	Oz'	Oz.
176	17	oc	Oc.
176	28	speecie	specie.
179	10	axa	axe.
179	12	$\bar{z}$	$\bar{z}'$
181	28	⟨Fig. 237⟩	⟨Fig. 237, 238⟩,
182	9	uând	luând.
183	17	x, luam xm	x' luam x'm.
184	11	$\frac{1}{2}\,b^1$	$+\frac{1}{2}\,b^1$

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pag.	Rândul	In loc de	A se ceti
190	15	a_1ae_2	a_1ae_3
193	Fig. 280	Fig. 2 o	Fig. 280.
193	30	ae_3	ae_5
195	18	Oz	$O\overline{z}$
195	28	P: prin x' P şi $\overline{x}'$	p: prin x', p şi $\overline{x}'$
195	29	iar P	iar p
195	30	P', P'	P', P''
196	Fig. 288.	Este răsturnată: a se îndrepta.	
197	3	$b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{z}}a = \frac{3}{z}$	$b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{z}} = a^{\frac{3}{z}}$
197	19	e stabili	le stabili
198	din urmă	$s = l + i - k$	$s = l + \overline{1} - k$
199	8	$= q$	$= 9$
199	31	$ap = b^z$... $ag =$	$ap = b^{\frac{1}{z}}$ ... $aq =$
200	11	$b^{\frac{1}{x}}b^{\frac{1}{y}}h^{\frac{1}{z}}$	$b^{\frac{1}{x}}b^{\frac{1}{y}}b^{\frac{1}{z}}$
202	11	formele	formulele
203	10	fOf	fof'
203	19	polului	planului
204	19	după drepte	după o dreaptă
204	20	orizontale	orizontală
208	1	de	trei
210	1	e^2n	e^3n
213	6	$b^{\frac{1}{2}}$	$d^{\frac{1}{2}}$
214	Fig. 315	Fig. 3 5	Fig. 315
215	Fig. 317	a se nota unghiul e_3	
222	21	tungită	lungită
222	29	*unghirile*	*unghiurile*

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Avertisment

Capitolele relative la: Formele compuse, Macle etc. cu care se închee partea I-a a cursului de Mineralogie, vor apărea odată cu Cristalografia fizică.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY